1 Föreläsning II

1.1 Gränsvärde

Ex1.10 Vi undersöker värdena på $g(x) = \dfrac{x+3}{2x}$, då $x \longrightarrow \infty$ och $x \longrightarrow 1$.

$x \to \infty$: Vi skriver om funktionen med en *polynomdivision*.

$$g(x) = \frac{x+3}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x}.$$

För $x \longrightarrow \infty$: Om x stort (och positivt), är den första termen (till sitt belopp) liten, så att

$$y = g(x) \approx 0 + \frac{1}{2}.$$

Det måste vara så att $g(x) \longrightarrow 1/2$, då $x \to \infty$. Vi visar det och resonerar så här. Om bara x tillräckligt stort så är $g(x)$ ”godtyckligt” nära $1/2$. Mer exakt uttrycks det så här:
Tag ett *godtyckligt* litet men positivt tal $\varepsilon (> 0)$ så att avståndet mellan $g(x)$ och $1/2$ är mindre än ε, d.v.s.

$$|g(x) - 1/2| < \varepsilon \text{ om } (\Leftarrow)\, x > x_0$$

För något x_0.
Det gäller nu att visa att det för ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ korresponderar ett x_0.
Sätt

$$\begin{aligned} \varepsilon > |g(x) - 1/2| &= \{g(x) > 1/2\} = g(x) - 1/2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{3}{2x} \Longleftrightarrow x > \frac{3}{2\varepsilon} =: x_0. \end{aligned}$$

Så skall vi alltså välja x_0. Med detta val får vi

$$|g(x) - 1/2| < \varepsilon \text{ om } (\Leftarrow)\, x > x_0.$$

Definition
En funktion $g(x)$ har gränsvärdet A, då $x \to \infty$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett x_0, sådant att

$$x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$x \to 1$: Vi ser att $g(1) = 2$ så det är rimligt att $g(x)$ går mot 2.
Vi jämför med gränsvärdet ovan men här gäller det att $|g(x) - 2| < \varepsilon$ för ett godt. $\varepsilon > 0$,
om bara x tillräckligt nära 1. ”tillräckligt nära” får betyda att $|x - 1| < \delta$ för något $\delta > 0$.
Vi sätter

$$\varepsilon > |g(x) - 2| = ... = \left|\frac{x + 3 - 4x}{2x}\right| = \frac{3}{2}\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

Vi börjar med att välja $x : |x| < 2$. Då får vi olikheten

$$\varepsilon > \frac{3}{2 \cdot 2}|x - 1| \Longleftrightarrow |x - 1| < \frac{4}{3}\varepsilon =: \delta.$$

Med detta val av δ blir $|g(x) - 2| < \varepsilon$.

Definition
En funktion $g(x)$ har gränsvärdet A, då $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, sådant att

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$$

(a) Vad händer med $g(x)$ då $x \to 0_+$?

Lösning

Vi ser att $D_g = \{x : x \neq 0\}$ och att $g(x) \longrightarrow \infty$ då $x \to 0_+$. Vi skriver detta som $g(x) \to \infty$, då $x \to 0_+$.

Man talar om ett oegentligt gränsvärde

Definition
$g(x) \to \infty$, då $x \to x_0$, om det För varje y_0 finns ett $\delta > 0$, sådant att

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow g(x) > y_0.$$

1.2 Kontinuitet

I exemplet har $g[x)$ den *sneda asymptoten* $y = 1/2$ och den lodräta asymptoten $x = 0$.

▪ Vi ser också att $x = 1$ ligger i D_g samt att $g(x)$ har gränsvärdet 2, då $x \to 1$.
Eftersom $g(1) = 2$ säger man att $g(x)$ är kontinuerlig i $x = 1$.

Defintion:
Antag att $a \in D_g$ och att $g(x) \longrightarrow g(a)$, då $x \to a$.
Då är funktionen g *kontinuerlig* i a.
Om g kontinuerlig i alla punkter $a \in D_g$ är funktionen kontinuerlig.

▮ De elementära funktionerna är kontinuerliga.

Sats (Instängningslagen) Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, samt att $f(x) \to A$ och $h(x) \to A$, då $x \to a$, så gäller att

$$g(x) \to A.$$

Bevis

Tag $\varepsilon > 0$.
Då finns $\delta_1 > 0$, sådant att $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, om $|x - a| < \delta_1$ samt så finns $\delta_2 > 0$, sådant att $-\varepsilon < h(x) - A < \varepsilon$, om $|x - a| < \delta_2$.
Låt nu $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ och antag att $|x - a| < \delta$. Då gäller

$$-\varepsilon < f(x) - A \leq g(x) - A \leq h(x) - A < \varepsilon$$

eller ekvivalent

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$$

och beviset är klart.

1.3 Några räkneregler för gränsvärde och kontinuitet

Antag att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to a$. Då gäller

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) + g(x) & \to & A + B \\ c\, f(x) & \to & c\, A \\ f(x) \cdot g(x) & \to & AB \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} & \to & \dfrac{A}{B}, \text{ om } B \neq 0 \\ f(g(x)) & \to & f(B) \end{array}\right. \quad \text{då } x \to a \tag{1}$$

Ex 1.11 Beräkna gränsvärdet av $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, då $x \to \infty$, $x \to 3$, $x \to -1$.

Lösning

- $f(x) \to 0$, då $x \to \infty$.
- $f(x) \to f(3) = 1/2$, då $x \to 3$
- $f(x) \to \infty$, då $x \to -1_+$.

1.4 Asymptot

Vi har tidigare talat om lodrät asymptot. Den har formen $x = a$ eller mer exakt som mängd $\{(x, y) : x = a\}$. Ex.vis har $h(x) = \dfrac{3}{x+2}$ den lodräta asymptoten $x = -2$.

Den har även den sneda symptomen $y = 0$.

Definition:
Funktionen $f(x)$ har den sneda asymptoten $y = kx + m$, då $x \to \infty$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett x_0, sådant att

$$x > x_0 \Longrightarrow |f(x) - (kx + m)| < \varepsilon.$$

Ex 1.12 Bestäm den sneda asymptoten till

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
2. $g(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+1}$
3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x}$

Lösning

1.
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} \longrightarrow 2 \text{ då } x \to \pm\infty.$$
Alltså är $y = 2$ sned asymptot (både i $-\infty$ och ∞).

2.
$$g(x) = \frac{2x^2-1}{x+1} = 2x - 2 + \frac{1}{x+1}.$$
Sned asymptot är $y = 2x - 2$.

3.
$$h(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{2+1/x^2}}{x} = \frac{|x|\sqrt{2+1/x^2}}{x}.$$
Om $x > 0$, d.v.s. $x \to \infty$, så gäller att $h(x) \to \sqrt{2}$. P.s.s. om $x < 0$, d.v.s. $x \to -\infty$, så gäller att $h(x) \to -\sqrt{2}$.

▮ Vi ser att vi får en sned asymptot $y = kx + m$ med $k \neq 0$ om tau har en rationell funktion med en grad högre på tälj. än nämn, och då m.h.a.

Det blir lite svårare i nästa exempel.

Ex 1.13 Bestäm asymptoterna till $r(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$.

Lösning

Vi börja med en eventuell sned asymptot $y = kx + m$.

(i) k:
Eftersom $\sqrt{x^4} = x^2$ är det troligt att $r(x) \approx kx + m$. Vi dividerar med x:

$$\frac{r(x)}{x} \approx k + \frac{m}{x}$$

Där vi låter $x \to \infty$. Då får vi k. För att se att ovanstående fungerar skriver vi om täljaren

$$\sqrt{x^4 + 1} = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{1 + 1/x^4} = x^2 \sqrt{1 + 1/x^4}.$$

$$\frac{r(x)}{x} = \sqrt{1 + 1/x^4} \to 1 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

(ii) m:

$$r(x) - kx \approx m \text{ om } |x| \text{ stort.}$$

Alltså skriv om

$$\begin{aligned} r(x) - x &= x\sqrt{1 + 1/x^4} - x = x(\sqrt{1 + 1/x^4} - 1) = \frac{x(1 + 1/x^4 - 1)}{\sqrt{1 + 1/x^4} + 1} = \\ &= \frac{1}{x^3(\sqrt{1 + 1/x^4} + 1)} \longrightarrow 0 \text{ då } x \to \pm\infty \end{aligned}$$

Svar: Därmed existerar m och $m = 0$. Sned asymptot är $y = x$. Lodrät asymptot är $x = 0$.

- Växande och avtagande funktion:

Definition
En funktion $f(x)$ definierad på ett intervall är växande ,

$$x_< x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funktionen är avtagande om $-f(x)$ är växande. Med

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ utbytt mot } f(x_1) < f(x_2)$$

är $f(x)$ strängt växande.

Ex 1.14 Visa att $f(x) = x^3$ är strängt växande.

Lösning

Tag $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2\, x_1 + x_1^2).$$

Nu är den första faktorn i HL > 0. Den andra faktorn är också > 0, något som man inser om man kvadratompletterar det.