# Föreläsning IV

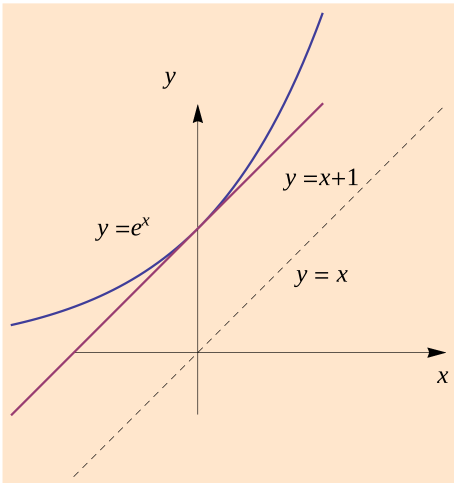
## Gränsvärde och kontinuitet, forts

Vi utvecklar gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}. \tag{1}$$

Detta gränsvärde hänger ihop med derivata av exponentialfunktion $f_a(x)=a^x$.

*Riktningskoefficienten för kurvans tangent i* $(x_0,y_0)=(0,1)$ *är* $f_a'(0)=k=1$ *för endast ett värde på basen, nämligen* $a=:e$.




För att bestämma värdet på $e$ måste vi introducera begreppet derivata som en tangents riktningskoefficient.
För talet $a=e$ blir (1)

$$1=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.$$

Byt $h=\ln(x+1)$. Då gäller $h\to 0 \iff x\to 0$. Vidare får vi $e^h-1=x$, så att gränsvärdet kan skrivas

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} \iff 1=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} \qquad (*)$$

Nu är

$$\frac{\ln(x+1)}{x}=\ln[(1+x)^{1/x}]$$

Vi tar nu $e$ upphöjt till VL och HL i $(*)$:

$$e^1=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Även bytet $x = 1/n$ kan göras och vi får

$$e = \lim_{n \to \pm\infty} (1 + 1/n)^n.$$

Genom att sätta in ett stort, ex.vis, positivt $n$ får vi $e$ approximativt.

| $n$ | $(1+1/n)^n$ |
|---:|---:|
| 10 | 2.59374 |
| 100 | 2.70481 |
| 1000 | 2.71692 |
| 10000 | 2.71815 |
| 100000 | 2.71827 |
| 1000000 | 2.71828 |

**Ex** $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ är funktionen ”sinushyperbolicus x” och är släkt med $\sin x$. Den är en udda funktion.
$\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ är funktionen ”cosinushyperbolicus x” och är släkt med $\cos x$. Den är en jämn funktion. Övning: Visa att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, ” hyperettan”.

Beräkna gränsvärdena

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x}$$
2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}$$
3. $$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x \sin x}$$
4. $$\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{3/x}.$$

**Lösning**

1. $$\frac{\sinh x}{x} = \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot e^{-x} \to 1 \cdot 1 = 1 \text{ då } x \to 0.$$

2.
$$\frac{\cos x - 1}{x\sin x} = -\frac{2\sin^2(x/2)}{x\sin x} = -\left[\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right]^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2} \to -1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
då $x \to 0$.

3.
$$\frac{\cosh x - 1}{x\sin x} \cdot \frac{\cosh x + 1}{\cosh x + 1} = \frac{\sinh^2 x}{x\sin x \cdot (\cosh x + 1)} =$$
$$\frac{\sinh^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cosh x + 1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$
då $x \to 0$. Obs! Vi kan göra samma typ av förlängning i 2.

4.
$$\lim_{x\to 0}(1 - 2x)^{3/x}.$$

**Lösning**

Byt $x = 1/n$. Då får vi $n \to \pm\infty$.

$$(1 - 2x)^{3/x} = (1 + 1/(-n/2))^{3n} = \left[(1 + 1/(-n/2))^{-n/2}\right]^{-6} \Longrightarrow$$
$e^{-6}$ då $n \longrightarrow \pm\infty$.

Satsen om största och minsta värde liksom satsen om mellanliggande värde nämndes lite svagt inledningsvis. Den säger att för en kontinuerlig funktion $g(x)$ på ett *slutet och begränsat intervall* ett sk. *kompakt intervall*, $[a, b]$ antar $f$ ett största och minsta värde samt alla värden däremellan.

**Ex 1.21** Funktionen $g(x) = \cos x$ är kontinuerlig på ex.vis och $[0, \pi]$. $g(0) = 1$ och $g(\pi) = -1$, som faktiskt är största resp. minsta värde. Det finns minst (exakt ett) $x$ för varje $y : -1 \leq y \leq 1$, sådant att $\cos x = y$. Eftersom det finn exakt ett $x$ för varje $y$ har $y = \cos x$ invers. Inversen kallas " arccos ".

**Ex 1.22** Visa att $f(x) := x^3 - 3x + 2$ har (minst) ett nollställe i intervallet $[-4, 4]$.

**Lösning**

$f$ är kontinuerlig inte bara på $[-4, 4]$. Vi har ingen "$p - q$" formel för en tredjegradsekvation men $f(-3) = -16 < 0$ och $f(0) = 2 > 0$, så att för $x : -3 < x < 0$ finns minst ett nollställe.
Nu kan man lätt se att $f(-2) = 0$ och $f(1) = 0$ (det andra är ett dubbelt nollställe). Vi får därmed också faktoruppdelningen av $f(x)$:
$$f(x) = (x + 2)(x - 1)^2.$$