1 Föreläsning I

1.1 Mängder

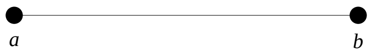
1.
$$\begin{aligned}
&\text{Mängden av naturliga tal:} && \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}\\
&\text{Mängden av positiva heltal:} && \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, ...\}\\
&\text{Mängden rationella tal:} && \mathbb{Q} = \{p/q : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\}\\
&\text{Mängden av reella tal:} && \mathbb{R} = \{x : \ -\infty < x < \infty\}
\end{aligned}$$

2. **Mer om talmängder, intervall**
Öppet intervall

som skrivs

$$(a, b) := \{x : \ a < x < b\}, \quad -\infty \leq a, \ \textit{och}\ b \leq \infty.$$

Slutet och begränsat intervall (kompakt intervall)



som skrivs

$$[a, b] := \{x : \ a \leq x \leq b\}, \quad -\infty < a, \ \textit{och}\ b < \infty.$$

1.2 Funktioner

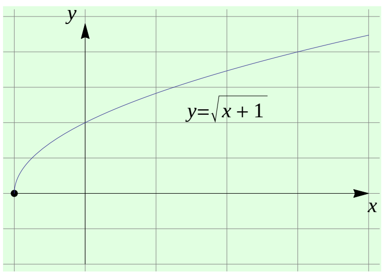
1. Begreppet "funktion" används här endast för reella funktioner definierade i ett intervall $I \subset \mathbb{R}$.

   - En funktion $f = f(x)$ har en definitionsmängd D_f som innehåller alla x för vilken funktionen är definierad.
   - För varje $x \in D_f$ finns precis ett värde $f(x)(= y)$.
   - Mängden $V_f := \{y : \exists\, x \in D_f : \ y = f(x)\}$ kallas värdemängden av f.

Ex Funktionen $f(x) = \sqrt{x+1}$ är definierad för de x, som uppfyller olikheten $x + 1 \geq 0$, d.v.s. för $x \geq -1$. Alltså är

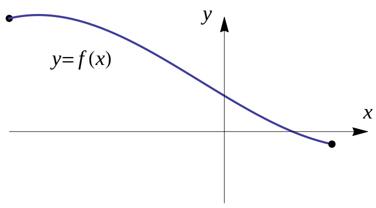
$$D_f = \{x : \ x \geq -1\} = [-1, \infty) \text{ och } V_f = [0, \infty)\,.$$

ett slutet och obegränsad mängd, speciellt utgör båda exempel på slutet och obegränsat intervall.

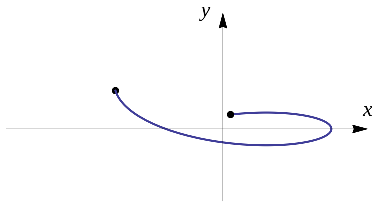


---

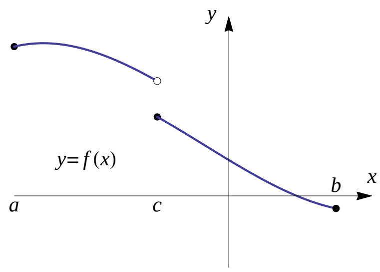
2. Graf av en kontinuerlig funktion, $f(x)$, definierad på det kompakta intervallet $[a, b]$.



Figuren nedan är inte grafen av en funktion $y = f(x)$, eftersom det finns fler än ett y för en del x.



Grafen nedan är grafen av en funktion. Funktionen är inte kontinuerlig.



3.

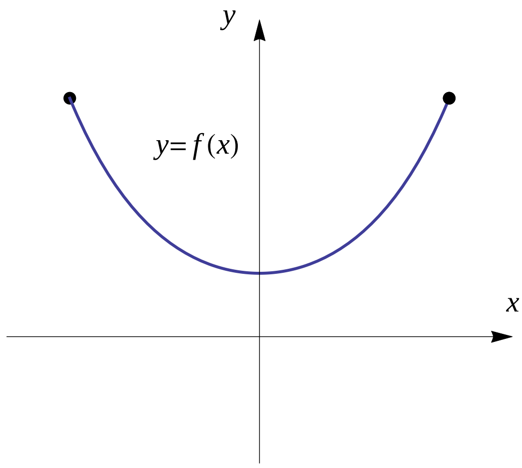
Sats En kontinerlig funktion definierat på ett kompakt intervall antar ett största och minsta värde, samt alla värden däremellan.

4. Våra elementära funktioner är i stort sett alla, kontinuerliga (och mycket mer.)

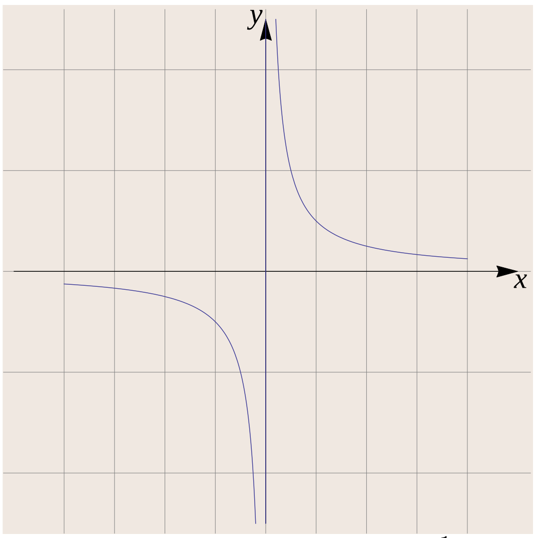
5. De elementära funktionerna utgär en liten skara funktioner men tillräckliga för att beskriva det mesta. De vanligaste är

Potensfunktion:	$f(x) = C\,x^a$
Polynom:	$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0.$
Exponentialfunktion:	$h(x) = C\,a^x$
Speciellt:	$f(x) = e^x$
Logaritmfunktion, speciellt:	$g(x) = \ln x$
Trigonometriska funktioner:	$g_1(x) = \cos x$
	$g_2(x) = \sin x$
	$g_3(x) = \tan x = \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$

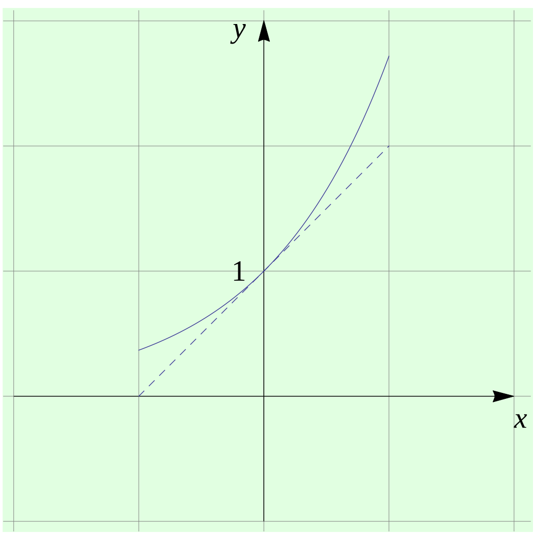
6. En funktion är jämn om $f(x) = f(-x)$, ex.vis $f(x) = \cos x$ och $g(x) = x^4$.



En funktion är udda om $-f(x) = f(-x)$, ex.vis $f(x) = \dfrac{1}{x}$ och $g(x) = e^x - e^{-x}$.

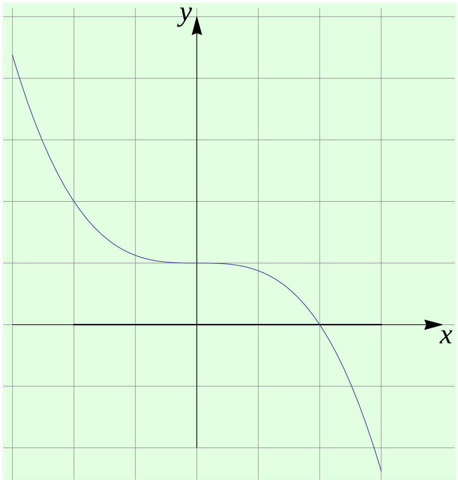


Graf av den udda funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



$f(x) = e^x$ *är varken udda eller jämn. Linjen* $y = x + 1$ *är tangent till kurvan i punkten* $(0, 1)$.

Ex Givet grafen $y = f(x)$,

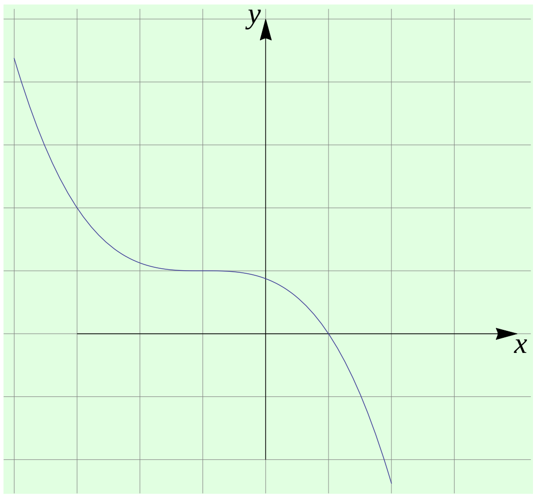


rita

(a) $y = f(x+1)$.

Lösning

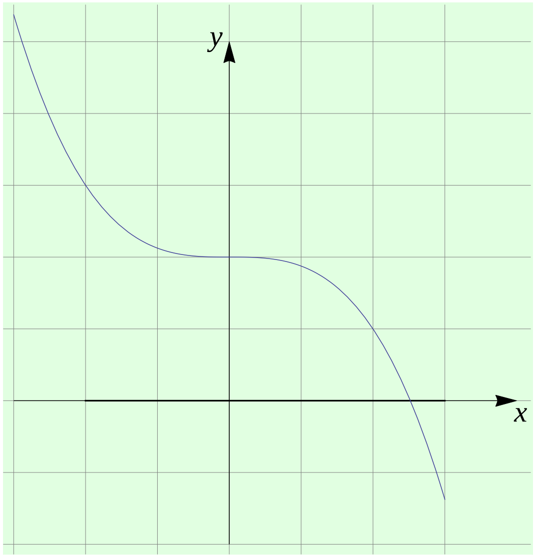
Det är samma kurva fast förskjuten en enhet åt vänster.



(b) $y = f(x) + 1$

Lösning

Det är samma kurva fast förskjuten en enhet uppåt.



Absolutbelopp Med $|x|$ menas talet x, om $x \geq 0$ och $-x$, om $x < 0$.

Ex:

$$\sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = +3 = 3 \text{ och allmänt } \sqrt{x^2} = |x|.$$

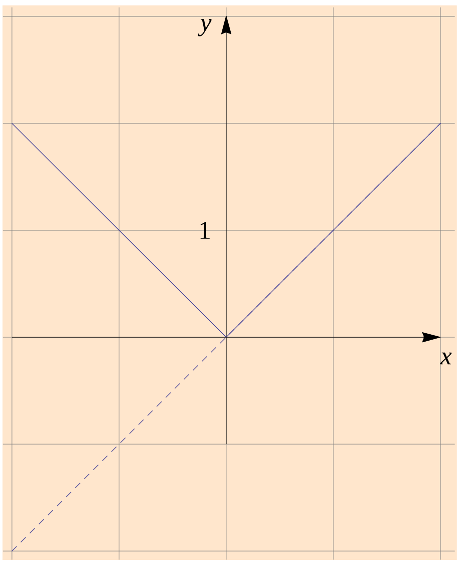
$$x = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

$|3 - 5| = |5 - 3| = 2$ är avståndet mellan $x = 3$ och $x = 5$.
$|x| = |x - 0|$ är avståndet mellan 0 och x.
$|x_1 - x_2|$ avståndet mellan x_1 och x_2.

---

7. Ex.vis är $| - x + 2| = |x - 2|$, $|2x + 4| = 2 \cdot |x + 2|$.
   Ex.vi är $|5 + 2| = |5 - (-2)| = 7$, avståndet mellan 5 och -2.
   $|x + 2|$ är avståndet mellan x och -2.

   Ekvationen $|x + 2| = 5 \iff x = 3$ eller $x = -7$, d.v.s. de x som har avståndet 5 till talet -2.



Graferna $y = |x|$ och $y = x$ (streckad)

8. Skarvning av funktioner till en ny funktion.

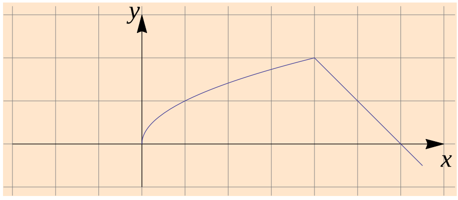
Ex Givet

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4 \\ C - x, & x > 4 \end{cases}$$

Bestäm konstanten C så att grafen hänger ihop, d.v.s. är kontinuerlig.

Lösning

Vi har att $f(4) = \sqrt{4} = 2$. Alltså skall $f(x)$ vara 2 även för $x > 4$. Detta är inte korrekt uttryckt. $f(x) \to 2$, då $x \to 4_+$. I princip skall vi ha $C - 4 = 2$, d.v.s. $C = 6$.



Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ *och* $f(x) = 6 - x$, $x > 4$.

Logaritmer (a) Omskrivning av $\lg(3 + 1.5)$:

$$\lg(3{+}1.5) = \lg 4.5 = \lg(9/2) = \lg 9 - \lg 2 = 2\lg 3 - \lg 2 = \lg(3 \cdot 1.5) = \lg 3 + \lg 1.5\,.$$

(b) Förenkling av $\dfrac{5^{\lg 5}}{2^{\lg 2}}$.

Lösning

$$\frac{5^{\lg 5}}{2^{\lg 2}} = \frac{(10/2)^{\lg 5}}{2^{\lg 2}} = \frac{10^{\lg 5}}{2^{\lg 5 + \lg 2}} = \frac{5}{2}.$$

Trigonometri De trigonometriska funktionerna är främst

$$\cos x, \quad \sin x, \quad \tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \text{ och } \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$\cos x$ är en jämn funktion, övriga udda.

Ex: (a) Förenkla...

$$\frac{1 + \tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

(b) Lös ekvationen...

$$\cos x = \sin 2x \iff \cos x = \cos(\pi/2 - 2x) \iff \begin{cases} x = \pi/2 - 2x + 2\pi\, n \\ -x = \pi/2 - 2x + 2\pi\, n \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3x = \pi/2 + 2\pi\, n \\ x = \pi/2 + 2\pi\, n \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi/6 + 2\pi\, n/3 \\ x = \pi/2 + 2\pi\, n \end{cases} \quad , \quad n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$$