1 Föreläsning VIII

1.1 Partiell integration, forts

Denna metod används för att beräkna integralen av en produkt.

Sats Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga samt om $F'(x) = f(x)$, så är

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx. \tag{1}$$

Bevis Derivatan av VL är $f(x)g(x)$.
Derivatan av HL är

$$F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x).$$

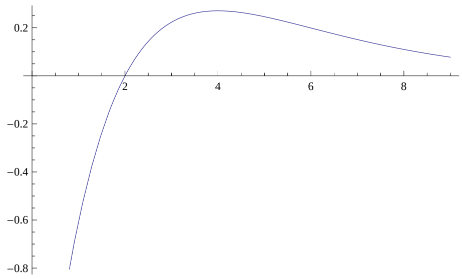
Ex: (a) Rita kurvan $y = (x-2)e^{-x/2} := f(x), \quad x \geq 0$

(b) och bestäm en primitiv funktion till $f(x)$.

Lösning: (a)

$$D_f = [0, \infty),\ f'(x) = \frac{1}{2}(4-x)e^{-x/2}.$$

Maximipunkt är $(4, \dfrac{2}{e^2})$, minimipunkt är $(0, -2)$. Sned asymptot är $y = 0$, då $x \longrightarrow \infty$.



(b) och bestäm en primitiv funktion till $f(x)$.

$$\begin{aligned}
\int (x-2)e^{-x/2}dx &= \left\{\ x-2 = g(x), \quad f(x) = e^{-x/2}\ \right\} = \\
&\quad (x-2)\cdot(-2)e^{-x/2} + 2\int 1\cdot e^{-x/2}dx = \\
&= (x-2)\cdot(-2)e^{-x/2} + 4e^{-x/2} + C.
\end{aligned}$$

En p.f. är $-2xe^{-x/2}$.

Rekommendationer Låt $p(x)$ vara ett polynom. För produkterna

$$p(x)\cdot \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx} \end{cases} \quad \text{låt } p(x) = g(x) \text{ i (1).}$$

För produkterna

$$p(x)\cdot \begin{cases} \ln x \\ \arctan x \end{cases} \quad \text{låt } p(x) = f(x) \text{ i (1).}$$

1.2 Variabelsubstitution, forts

Derivata igen Derivata av sammansatt funktion:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \text{ eller } \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Det senare skrivsättet kallas *kedjeregeln*.

Ex Beräkna integralen...

$$\int 2x \cdot e^{-x^2/2} dx \quad = \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2/2 = t = t(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = x \\ \Longleftrightarrow x\,dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$2\int e^{-x^2/2} \underbrace{x\,dx}_{=dt} = 2\int e^{-t} dt = C - e^{-t} = C - 2e^{-x^2/2} \text{ (Svar).}$$

Kommentarer Differentialerna dt, dx, dy och df etc, är oändligt små tal, vilka tillhör en större mängd än de reella talen, *mängden av de hyperreella talen.*

1.3 Derivata m.a.p. övre gräns

- Vi har sedan tidigare att $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

Ex Derivera $\int_{-1}^{x^2} \sqrt{t+3}\,dt$.

Lösning

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x^2} \sqrt{t+3}\,dt = \underbrace{\sqrt{x^2+3}}_{\text{y.d.}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{i.d.}}.$$

1.4 Integral, som area med tecken

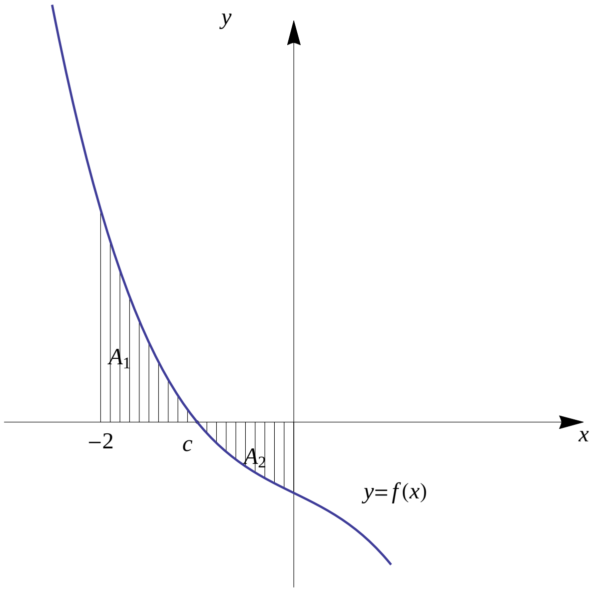
- $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx,$$

  d.v.s. omflyttning av gränserna ger teckenändring.

Ex Beräkna arean som ligger mellan kurvan $y = -3 - 2x - x^3$ och $y = 0$, där $-2 \leq x \leq 0$.

Lösning

Vi ser att kurvan skär $x-$axeln i $x = c = -1$ eftersom $-3 - 2 \cdot (-1) - (-1)^3 = 0$. Man får att $y = f(x) := -3 - 2x - x^3 = -(x+1)(x^2 - x + 3)$ och $x^2 - x + 3$ har inget reellt nollställe. Man kan enkelt konstatera att kurvan har utseendet som i figuren nedan.



Vi söker arean A_1+A_2 och formellt är denna summa $\int_{-2}^{0} |f(x)|dx$. *Tekniskt* beräknas denna area som

$$A_1 + A_2 = \int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{15}{4} + \frac{7}{4} = \frac{11}{2}.$$

1.5 Area mellan funktionskurvor

Ex Beräkna arean mellan $y = f(x) = x + 2$ och $y = g(x) = 4 - x^2$ med $x-$gränser $a < b$, där a är $x-$koordinatens skärningspunkt mellan kurvorna och $b = 0$.

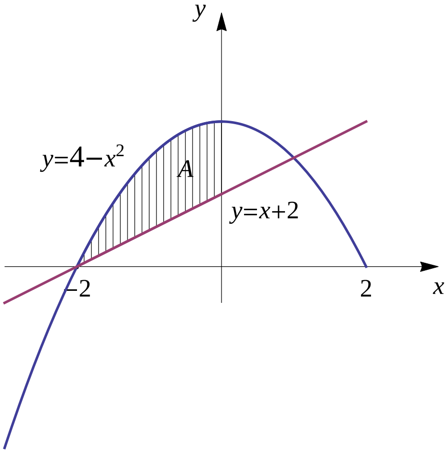
Lösning

Skärningspunkten ges av

$$4 - x^2 = x + 2 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

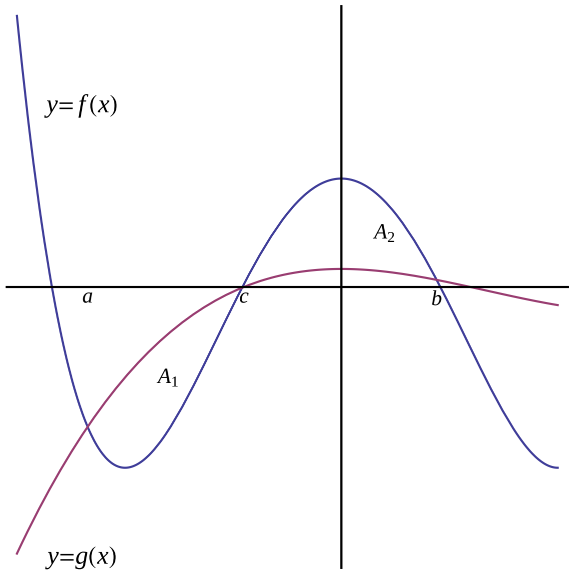
Alltså är $a = -2$. Vi får arean som integralen

$$A = \int_{-2}^{0} (4 - x^2 - (x+2))dx = \int_{-2}^{0} (2 - x - x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{10}{3}$$



Kommentarer

- Om endera av kurvorna helt eller delvis ligger under $x-$axeln, får man ändå rätt area.
- Om man integrerar, som i exemplet, $f(x)-g(x)$ får man arean men med fel tecken. Detta justerar man lätt efter att ha integrerat.
- Om Kurvorna skära varandra enligt nedan



så är arean mellan kurvorna $A_1 + A_2$. Detta kan skrivas

formellt: $$A_1 + A_2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

tekniskt: $$A_1 + A_2 = \int_a^c (g(x) - f(x))dx + \int_c^b (f(x) - g(x))dx.$$

1.6 Integral av rationell funktion forts

En rationell funktion är en kvot mellan två polynom $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. En sådan funktion skall *utvecklas*.

Ex Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

Lösning

Vi gör en snabb polynomdivision:

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1} \Longrightarrow \int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2}-1+\ln(x+1)+C.$$

- Ett rationellt uttryck, alltså en rationell funktion skall alltså utvecklas. Detta beskriver vi med ett flödesschema:

Om grad tälj$\geq$grad nämn $\longrightarrow$ polynomdivision(*).

Om grad tälj$<$grad nämn $\longrightarrow$ uppdelning i partialbråk.

Ex Bestäm en primitiv funktion till $h(x) = \dfrac{4x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$.

Lösning

Ett rationellt uttryck, alltså en rationell funktion skall alltså utvecklas.

Efter pol.div. brukar PBU följa. I detta exempel är

$$h(x) = \{\text{pol.div.}\} = 4x + \frac{3x+1}{x^2-1}.$$

Nu är den sista termen sådan att grad tälj < grad nämn. Nämaren kan fakroriseras och hela andra termen är

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \{\text{PBU}\} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Man ansätter med termer där nämnarna är de två faktorerna och täljarna har en grad lägre än nämnarna.

Liknämnigt ger

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Nämnarna är lika och alltså måste täljarna vara (identiskt) lika:

$$3x+1 = A(x+1)+B(x-1) \iff \begin{cases} & \text{VL} \quad \text{HL} \\ x^0 : & 1 = A - B \\ x^1 : & 3 = A + B \end{cases} \iff \begin{cases} A & = 2 \\ B & = 1 \end{cases}$$

Nu kan vi integrera alla termer:

$$\int h(x)dx = \int \left(4x + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = 2x^2 + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C.$$

Svar: *En* primitiv funktion är $H(x) := 2x^2 + 2\ln|x-1| + \ln|x+1|$.

Kommentar: I stället för pol.vid. och PBU, kana man göra en ansättning. I detta fall vet vi att kvoten har grad $3-2=1$. Alltså är

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{4x^3 - x + 1}{x^2-1} = Ax + B + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \{A = 4\} = \\ &= \frac{4x^3 - 4x + Bx^2 - B + Cx + C + Dx - D}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Ett ger ett ekv. syst.

$$\begin{array}{cccc} \hline & \text{VL} & & \text{HL} \\ \hline x^3: & 4 & = & 4 \\ \hline x^2: & 0 & = & B \\ \hline x^1: & -1 & = & -4+C+D \\ \hline x^0: & 1 & = & -B+C-D \\ \hline \end{array} \iff \begin{cases} B = 0 \\ C = 2, \\ D = 1 \end{cases}$$

så att utvecklingen är, som tidigare, $h(x) = 4x + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.

Ex Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{x^3+x}dx$.

Lösning

Här är graden för täljaren lägre än för nämnaren, som är $x(x^2+1)$. Alltså endast PBU. Vi får två termer, som är bråk, där täljarna ansätts en grad lägre än nämnarna.

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\,(x^2+1)}$$

Detta ger ekvationssystemet

	VL		HL
x^0 :	-1	$=$	A
x^1 :	2	$=$	C
x^2 :	0	$=$	$A+B$

med tre ekvationer (grad 0, 1, och 2) och tre obekanta/variabler (A, B och C). lösningen är $A=-1$, $B=1$ och $C=2$. Integralen är alltså

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx &= \left[-\ln x + 2\arctan x + \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}} = \\ & -\ln\sqrt{3} + \ln 1 + 2\arctan\sqrt{3} - 2\arctan 1 + \frac{1}{2}\ln(3+1) - \frac{1}{2}\ln(1+1) = \\ & \frac{1}{2}\ln(2/3) + 2\cdot\frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(2/3) + \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

1.7 Generaliserad integral

Med det menas att, antingen är funktionen $f(x)$ obegränsad ($f(x)\to\pm\infty$) eller så är integrationsintervallet obegränsat (ex. vis $[a,\infty)$). Integralen beräknas då som ett gränsvärde av endera av intervallers gränser.

Ex: Integralen $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är generaliserad, ty obegränsad integrand.

Ex: Integralen

$$\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2}dx$$

är generaliserad ty obegränsat intervall.

- För att beräkna dessa integraler börjar vi med att bestämma en p.f. och sätter undre gräns tIll $a>0$ i första exemplet

$$\int_a^4 x^{-1/2}dx = [2x^{1/2}]_a^4 = 4 - 2\cdot a^{1/2} \to a \text{ då } 4 \to 0_+.$$

Man säger att integralen är *konvergent* med värdet 4.

- Till den andra ingralen har vi redan en primitiv funktion $-2xe^{-x/2}$.

$$\int_0^b (x-2)e^{-x/2}dx = \left[(-2xe^{-x/2}\right]_0^b = 0 - 2be^{-b/2} \to 0 \text{ då } b\to\infty.$$

Svar: $\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2}dx = 0.$

Kommentar: Integralen är konvergent och intgrandens kurva har lika mycket area ovan som under $x-$axeln.

Ex: Den första integranden ger en divergent integral $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$, ty

$$\int_4^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{b}-\sqrt{4}) \longrightarrow \infty, \text{ då } b\to\infty.$$

$x^{-\alpha}$ För vilka a är $\int_0^1 x^{-\alpha}dx,$ respektive $\int_1^\infty x^{-\alpha}dx$ konvergent?
Beräkna värdet av integralen för a som ger konvergens. Vi ser snart att $-\alpha < 1$ och $-\alpha > 1$ ger konvergens i respektive fall. Primitiv funktion är $F_\alpha(x) = \dfrac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$.

$\alpha > 1$:

$$\int_a^1 x^{-\alpha}dx = \frac{1^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{a^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \longrightarrow \infty, \text{ då } a \to 0_+$$

$$\int_1^b x^{-\alpha}dx = \frac{b^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \longrightarrow \frac{1}{\alpha-1} \text{ då } a \to \infty$$

$\alpha < 1$:

$$\int_a^1 x^{-\alpha}dx = \frac{1^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{a^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}, \text{ då } a \to 0_+$$

$$\int_1^b x^{-\alpha}dx = \frac{b^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \longrightarrow \infty \text{ då } a \to \infty$$

$\alpha = 1$ ger divergens i båda fallen, eftersom p.f. är $F(x) = \ln x$.

Kommentar Vi har beräknat $\int_0^4 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = 4$, där alltså $\alpha = 1/2 < 1$ och är integralen konvergent.

$p(x)e^{\alpha x}$**:** För ett polynom $p(x)$, så är $\int_0^\infty p(x)e^{\alpha x}dx$ konvergent omm $\alpha < 0$ (d.v.s $k < 0$).

p.f.: Genom upprepad P.I. med $g(x) = p(x)$, blir den primitiva funktionen ånyo på formen

$$q(x)e^{\alpha x} \text{ med } \operatorname{grad} p(x) = \operatorname{grad} q(x).$$

Detta betyder att, istället för P.I., kan man göra en ansättning. I ett tidigare exempel har vi $(x-2)e^{-x/2} := f(x)$. P.f. har formen $(Ax+B)e^{-x/2} := F(x)$. Det ger att

$$f(x) = (x-2)e^{-x/2} = F'(x) = Ae^{-x/2} - \frac{1}{2}e^{-x/2}(Ax+B) = \frac{1}{2}e^{-x/2}(-Ax+2A-B).$$

Genom att jämföra polynomen i VL och HL får vi

$$1 = -A,\ 2A - B = -4 \Longleftrightarrow A = -2,\ B = 0.$$

Och vi får samma p.f. $F(x) = -2x\,e^{-x/2}$.

Ex: Bestäm den p.f. till $f(x) = (x-2)2^{-x/2}$, som går genom punkten $(2, e)$.

Lösning

Alla p.f. ges av $F(x) = C - 2xe^{-x/2}$. Vi söker $F(x)$, sådan att

$$F(-2) = 2e, \qquad \text{d.v.s. } F(-2) = C + 4e = e \Longleftrightarrow C = -2e$$

Sökt funktion är alltså $F(x) = -2(xe^{-x/2} + e)$.