1 Föreläsning VII, VT 2018

1.1 Integral

En förenklad definition Antag att $f(x) \geq 0$ då $a \leq x \leq b$ och att $f(x)$ är kontinuerlig där. Den *bestämda* integralen $\int_a^b f(x)dx$ definieras som arean av ytan som begränsas av $y = f(t)$, $y = 0$, $t = a$ och $t = b$, se figur.

Insättningsformeln Vi definierar $F_0(x)$ som arean i figuren. Då är $F_0(x+h) - F_0(x)$ approximativt arean av den smala remsan med $t-$gränser x och $x+h$. Denna smala remsa har en area approximativt som en rektangel med bredd h och höjd $f(x)$. Alltså

$$F_0(x+h) - F_0(x) \approx h \cdot f(x) \text{ eller } \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} \approx f(x).$$

Vi finner följande troligt.

- VL är en differenskvot och $\longrightarrow F_0'(x)$, då $h \longrightarrow 0$.
- HL i Approximationen övergår i likhet då $h \longrightarrow 0$.
- ”VL=HLger att $F_0'(x) = f(x)$.
- Speciellt ser vi att $F_0(a) = 0$ och $F_0(b) =: \int_a^b f(t)dt$

  – En funktion $F(x)$, sådan att $F'(x) = f(x)$ kallas *primitiv funktion* till $f(x)$.

  – Antag att $G(x)$ är deriverbar i ett intervall med derivata $= 0$. Då är $G(x) = C$, d.v.s. konstant. Speciellt om $G = F_1 - F_2$ och $G' = 0$, så är $F_1' - F_2' = 0$, d.v.s. $F_1 = F_2 + C$.

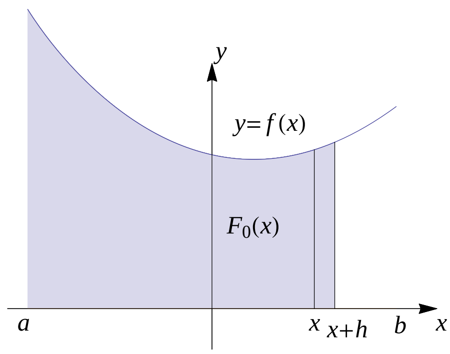
  – Två funktioner F_1 och F_2, som är primitiva funktioner till samma $f(x)$ i ett givet intervall, skiljer sig åt med en additiv konstant:

  $$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Longleftrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C \Longleftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + C\,.$$

  – Låt $F(x)$ vara en (annan) primitiv funktion till $f(x)$. Då är $F_0(x) = F(x) + C$.

    ∗ $F_0(a) = 0 = F(a) + C \Longleftrightarrow C = -F(a)$, så att $F_0(x) = F(x) - F(a)$.

    ∗ $F_0(b) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, den s.k. *insättningsformeln.*



- $\int_a^b f(x)dx$ kallas bestämd integral och är ett tal.
- $\int f(x)dx$ kallas *obestämd integral* och betyder *alla* primitiva funktioner till $f(x)$. De är , enligt ovan, $F(x) + C$, där $F(x)$ är *någon* primitiv funktion till $f(x)$.

- $$\int x^\alpha = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \text{om } \alpha \neq -1 \\ \\ \ln|x|, & \text{om } \alpha = -1 \end{cases}$$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1}$.
- $\displaystyle\int \tan x\,dx = C - \ln|\cos x|$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}(-\ln|\cos x|) = -\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \tan x$.
- $\displaystyle\int_6^9 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_6^9 = \ln(3/2)$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln|\tan(x/2)| + C$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}\ln|\tan(x/2)| = \frac{1}{\sin x}$.
- $\displaystyle\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.
- $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.
- $\displaystyle\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$.
- $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ och p.s.s. $\displaystyle\int e^{k\,x}dx = \frac{1}{k}e^{k\,x} + C$.
- Bestäm *en* primitiv funktion till $\sqrt{2x}$, bestäm alla primitiva funktioner till $\sqrt{2x}$ och bestäm $\displaystyle\int_2^8 \sqrt{2x}\,dx$.

  Lösning:

  (*En* primitiv funktion)

  $$f(x) := (2x)^{1/2} \Longleftarrow F(x) = \frac{2}{3}(2x)^{3/2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot x\sqrt{2x}.$$

  (*alla* primitiva funktioner)

  $$\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{2x} + C$$

  (En bestämd integral)

  $$\int_2^8 f(x)dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{2x}\right]_2^8 = \frac{56}{3}.$$

En liten regel Om $f(x)$ har primtiv funktion $F(x)$, har $f(kx+m)$ primitiv funktion $\frac{1}{k}F(kx+m)$ för $k \neq 0$; När den inre funktionen är "linjär", d.v.s. $z = kx+m$ kan man "kompensera" för den inre derivatan genom att dividera med k, ex.vis

$$\int \sqrt{3x+1}dx) = \int (3x+1)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(3x+1)^{3/2}\cdot\frac{1}{3} + C = \frac{2(3x+1)\sqrt{3x+1}}{9} + C.$$

Tre moment vid beräkning av integral

1. Omskrivning av integranden *innan* integration.
2. Integration, d.v.s. bestämning av primitiv funktion och eventuellt insättning av övre och undre gräns.
3. Omskrivning/förenkling av svaret.

Derivata och integral **I** Ex.vis är $\int 2x\,dx = x^2 + C$ och därefter $D(x^2+C) = 2x$. Allmänt är $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$.
Integral och derivata tar ut varandra i den ordningen.

II Ex.vis är $\dfrac{d}{dx}\,x^2 = 2x$ och därefter $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$. Allmänt är $\displaystyle\int \left[\frac{d}{dx} f(x)\right] dx = f(x) + C$.

Derivata och integral tar ut varandra i den ordningen, nästan.

- Eftersom derivering har linjära egenskaper, så har även integraler det:

$$\int (a\,f(x) + b\,g(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

P.s.s. för bestämd integral.
Bevis genom att derivera båda led.

Integrationsmetoder P.I. , som är förkortning för *partiell integration*. Med den fixar man en integrand, som är en produkt. Den bygger på att derivatan av produkt. $(u\cdot v)' = u'v + uv'$. Vi integrerar båda led:

$$\int (u\,v)'dx = u\,v = \int u'v\,dx + \int u\,v'\,dx.$$

Vi flyttar om termerna och får

$$\int u'v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx\,.$$

Här gör man ett byte och sätter $F(x) = u(x)$, så att $F'(x) = f(x) = u'(x)$ samt $v(x) = g(x)$. Då erhålls

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx \qquad (1)$$

Ex Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$.

Lösning:

Vi väljer $x = g(x)$m den funktion som är deriverad i (1) och därmed $f(x) = \sin x$. Vi ser att

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)dx = \sin x - x\cos x + C$$

så att

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = [\sin x - x\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

V.S. , som är förkortningen för *variabelsubstitution*.

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}\,dt. \qquad (2)$$

Man sätter alltså $x = x(t)$, d.v.s. gör x till en funktion av en ny variabel t. När man gör V.S. ser det dock inte ut, riktigt som att man gör x till en funktion av t. Vi kan enkelt bevisa (2) genom att derivera båda sidor m.a.p. t.

Ex Betäm en primitiv funktion till $\dfrac{1}{x^2+4}$.

Lösning:

Vi gör omskrivningen $\dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{(x/2)^2+1}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x/2)^2+1}\,dx = \{x = 2t,\ dx = 2dt\} = \\ &\quad \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\,\arctan t + C.\end{aligned}$$

Svar: En primitiv funktion är $\dfrac{1}{2}\,\arctan(x/2)$.

Ex Bestäm en primitiv funktion till $\tan x$.

Lösning:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \quad = \quad \left\{ \begin{array}{c} \cos x = t,\ \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x \\ dt = -\sin x\,dx,\ \text{d.v.s. täljaren med fel tecken.} \end{array} \right\} =$$

$$\int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Svar: En primitiv funktion till $\tan x$ är $-\ln|\cos x|$.

Rationell integrand En sådan funktion $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ skall *utvecklas*. Vi antar att p och q är polynom och att r är förkortat så långt som möjligt.

- Om $\operatorname{grad} p \geq \operatorname{grad} q$ så *polynomdivision.*
- Om $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ så *uppdelning i partialbråk.*

Ex Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - x}\,dx.$

Lösning:

$\operatorname{grad} p = 3 \geq \operatorname{grad} q = 2$, alltså pol. div., som ger

$$r(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2 - x}\,.$$

Och nu PBU på den sista termen, ty där har täljaren graden 0 och nämnaren graden 2. Vi faktoriserar nämnaren och ansätter

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}\,.$$

Ansättningen i täljaren med A och B beror på att dessa har en grad lägre än respektive nämnare. Genom att sätta HL på MGN och identifiera täljarna i VL och HL får man

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \iff \begin{cases} & \text{VL} \quad \text{HL} \\ x^0 : & 1 = -A \\ x^1 : & 0 = A + B \end{cases} \iff A = -1,\ B = 1\,.$$

Alltså kan integralen skrivas

$$\int \left(2x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = x^2 + x - \ln|x| + \ln|x-1| + C\,.$$

Ex Beräkna (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$, (b) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx.$

Lösning:

(a) Detta är en bestämd integral. Vi skriver om integranden som $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$. Alltså är

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\,.$$

(b) Detta är en obestämd integral. Vi skriver om integranden som $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x$ och gör V.S. $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$, så att

$$\int \sin^3 x\,dx \quad = \quad \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx = \int (1 - t^2)(-1)dt =$$

$$\frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$