1 Föreläsning VI

1.1 Derivatans betydelse för funktionens graf

Vi har sedan tidigare $f'(x) \geq 0$ i ett intervall $\Longrightarrow f(x)$ är växande i intervallet. Till detta har vi att, om $(x_0, f(x_0))$ är en lokal maximipunkt, så är $f'(x_0) = 0$, om derivatan existerar.

Ex: Med funktionen $w(t) = 2t^2 + t - 1$ är grafen en parabel. Vi skall bestämma dess lokala extrempunkter, definitions- och värdemängd.

Lösning

Parabelns extrempunkt får vi genom att lösa ekvationen $w'(t) = 0$. Vi kan i detta fall få extrempunkten m.h.a. kvadratkomplettering.

$$\begin{aligned} w(t) &= 2(t^2 + t/2 - 1/2) = 2\left(t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= 2\left[(t+1/4)^2 - \frac{9}{16}\right] \geq -\frac{9}{16} \end{aligned}$$

som är dess minsta värde och som antas då $t = -1/4$.

Svar: Funktionens enda extrempunkt är $(-1/4, -9/16)$ och $-9/16$ är dess minsta värde. Definitionsmängd är $D_w = \mathbb{R}$ och $V_w = [-9/16, \infty) = \{y : y \geq -9/16\}$.

Kommentarer

- Man kan, via K.K., även få funktionens eventuella nollställen:

$$\begin{aligned} w(t) &= 2\left[(t+1/4)^2 - \frac{9}{16}\right] = 2(t+1/4+3/4)(t+1/4-3/4) = \\ &= 2(t+1)(t-1/2) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t = t_1 = 1/2 \\ \\ t = t_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

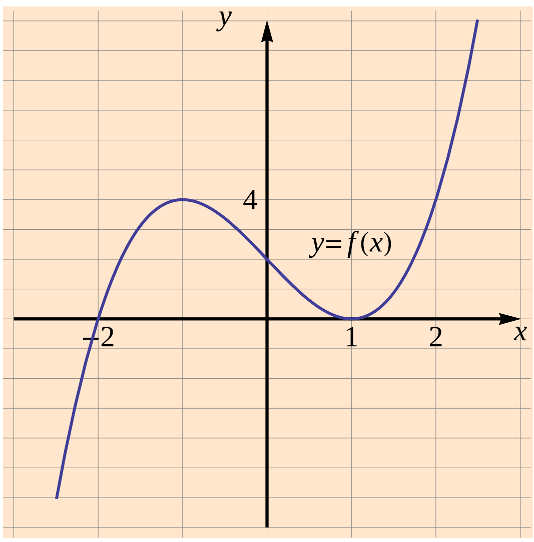
- $t-$koordinaten som ligger precis i mitt emellan t_2 och t_1 är $t_0 := \dfrac{t_1 + t_2}{2} = -\dfrac{1}{4}$ och är minimpunktens $t-$koordinat. Ett gäller för parabler men inte för tredjegradspolynom.

Ex på sidan 5 i filen **forelasningVvt2018.pdf** är funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 2$ med derivata $f'(x) = 3x^2 - 3$. Derivatans nollställen korresponderar mot funktionens stationära punkter (per definition). Här $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$ med nollställen $x = \pm 1$, alltså stationära punkter. Vi kan dessutom ta reda på derivatans tecken, som avgör var funktionen är växande och avtagande. Det görs lämpligast med ett *teckenschema*.

x	$<$	-1	$<$	1	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

där det t står lok. max och lok. Min, kan även funktionsvärdena skrivas. De är $f(-1) = 4$ och $f(1) = 0$. Detta är tillräckligt för att kunna rita grafen.

Svar:



- $D_f = V_f = \mathbb{R}$,
- Lokal maximipunkt $(-1, 4)$, lokal minimipunkt $(1, 0)$.

Ex Konstruera krvan $y = \sqrt{f(x)} =: g(x)$ där $f(x)$ är samma som i exemplet innan.

Lösning

- Vi ser att $D_g = \{x : x \geq -2\} = [-2, \infty)$.

- Stationära punkter: Vi har en yttre funktion $\sqrt{z}$ med y.d.

$$\frac{d}{dz}\, z^{1/2} = \frac{1}{2}\, z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \text{ så att } g'(x) = \frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x+2}}.$$

Obs Täljaren är derivatan $f'(x)$ från föregående exempel. För att få stationära punkter löser vi ekvationen $g'(x) = 0$. Det är detsamma som att täljaren $= 0$ *och* att nämnaren $\neq 0$. Detta betyder att $x = \pm 1$, som skall sättas in i nämnaren:

$$\sqrt{(-1)^3 - 3\cdot(-1) + 2} = 2 \text{ och } \sqrt{1^3 - 3\cdot 1 + 2} = 0.$$

Det är därmed inga problem med $g'(-1)$ ty nämnaren är $2 > 0$. Med $x = 1$ är nämnaren $= 0$. Alltså har vi, för $x = 1$, att $g'(1)$ är av typen "$\frac{0}{0}$" och eventuellt får vi ett gränsvärde då $x \to 1$. Fortsättningen är (Obs! Vi utnyttjar faktoriseringen av $f(x)$ och kommer ihåg att $\sqrt{a^2} = |a|$)

$$g'(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{2\sqrt{(x-1)^2(x+2)}} = \frac{3(x-1)(x+1)}{2|x-1|\sqrt{x+2}} = \begin{cases} -\dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} & \text{om } x < 1 \\[2ex] \dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

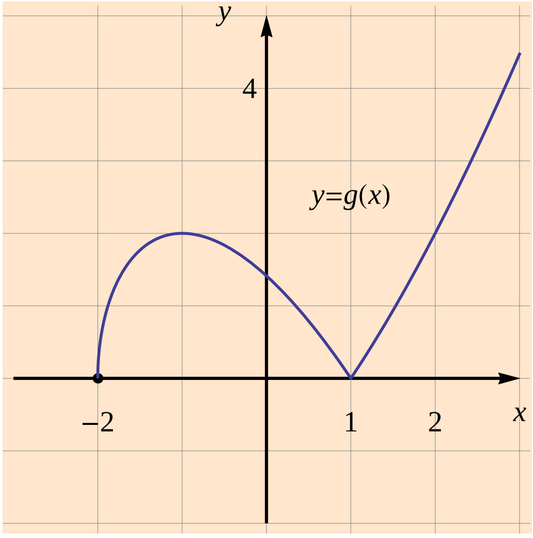
med vänster- och högergränsvärde $-\sqrt{3}$ respektive $\sqrt{3}$. Eftersom tangentens riktningskoefficient är olika för $x \to 1_-$ och $x \to 1_+$, är punkten $(1, g(1)) = (1, 0)$ saknas derivata i $x = 1$. Vi får en "spetspunkt", en punkt där tangent saknas. Eftersom $g(x) > 0$ utom i $x = -2$ och $x = 1$ och $g(1) = 0$, så är $(1, g(1))$ en lokal minimipunkt.

Teckenschema:

x	-2	$<$	-1	$<$	1	$<$
$g'(x)$	∞	$+$	0	$-$	exist. ej	$+$
$g(x)$	Lok. min	$\nearrow$	Lok. max	$\searrow$	Lok. min	$\nearrow$

Svar:

* $D_g = [-2, \infty)$ och $D_{g'} = (-2, 1) \cup (1, \infty)$,
* stationär punkt i $x = -1$,
* lokala minpunkter $(-2, 0)$ och $(1, 0)$, lokal maxpunkt $(-1, 2)$.
* Funktionens minsta värde är $g_{\min} = 0$ och funktionen saknar största värde.
*



Ex: Konstruea kurvan $y = \dfrac{x^3}{x^2-3} =: r(x)$.

Lösning

$r(x)$ är en udda funktion.

$$D_r = \{x : x \neq \pm\sqrt{3}\}$$

Vi ser att, om $x \to \sqrt{3}_-$, så gäller att $r(x) \to -\infty$ och om $x \to \sqrt{3}_+$, så gäller att $r(x) \to +\infty$. Alltså är $x = \pm\sqrt{3}$ lodräta asymptoter. Sned asymptot med pol. div.

$$g(x) = x + \frac{3x}{x^2-3} \implies \text{ sned asympot } y = x.$$

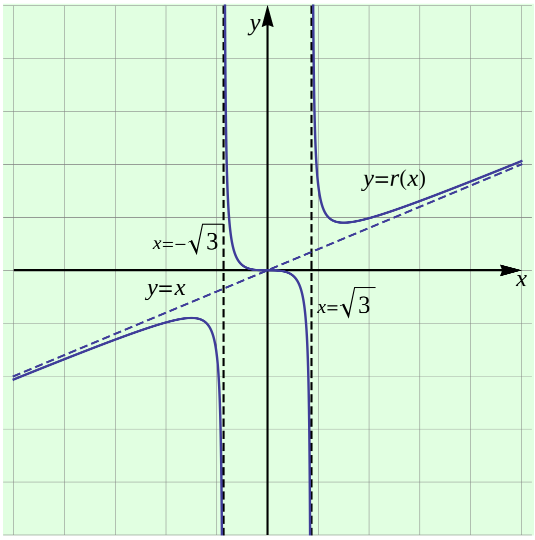
Stationära punkter

$$r'(x) = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x^2-3)^2} = 0 \iff x = \pm 3 \vee x = 0.$$

$$r(-3) = -9/2, \quad r(3) = 9/2, \quad r(0) = 0.$$

Teckenschema:

x	$<$	-3	$<$	0	$<$	3	$<$
$r'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$r(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	terrasspkt	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$



Ex Konstruera kurvan $h(x) = \sqrt{x^2 + 1/x^2}$.

Lösning

- $D_h = \{x : x \neq 0\}$.
- Vi ser dessutom att $h(-x) = h(x)$, d.v.s. $h(x)$ är en jämn funktion. Det betyder ju att grafen är sin spegelbild i $y-$axeln.
- Lodrät asymptot $x = 0$, ty $h(x) \to \infty$, då $x \to 0$.
- Sneda asympoter har ju formen $y = kx + m$. Vi ser att om $|x|$ stort, så är $h(x) \approx |x|$. Alltså bör $y = -x$ och $y = x$ vara sneda asymptoter. Vi beräknar k genom
$$\frac{h(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{1 + 1/x^4}}{x}$$
och måste skilja på $x \to -\infty$ och $x \to \infty$. I det förra fallet är $x < 0$, så att
$$\frac{h(x)}{x} = -\sqrt{1 + 1/x^4} \to -1 =: k_1 \text{ då } x \to -\infty$$
Och p.s.s. är $k_2 = 1$, då $x \to \infty$. Nu återstår $m-$värdet och vi behandlar fallet då $x \to +\infty$.
$$\begin{aligned} h(x) - kx &= h(x) + x = |x|\sqrt{1 + 1/x^4} + x = x - x\sqrt{1 + 1/x^4} = \\ \{\text{Förläng. m. konj.}\} &= x(1 - \sqrt{1 + 1/x^4}) = x(1 - \sqrt{1 + 1/x^4}) \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 1/x^4}}{1 + \sqrt{1 + 1/x^4}} = \\ &= x \cdot \frac{-1/x^4}{1 + \sqrt{1 + 1/x^4}} \to 0 =: m_2 \text{ då } x \to \infty. \end{aligned}$$

P.s.s. är $m_1 = 0$ för $x \to -\infty$. Eftersom gränsvärdena existerar har vi två asympoteter $y = \pm x$, då $x \to \pm\infty$

– Stationära punkter:

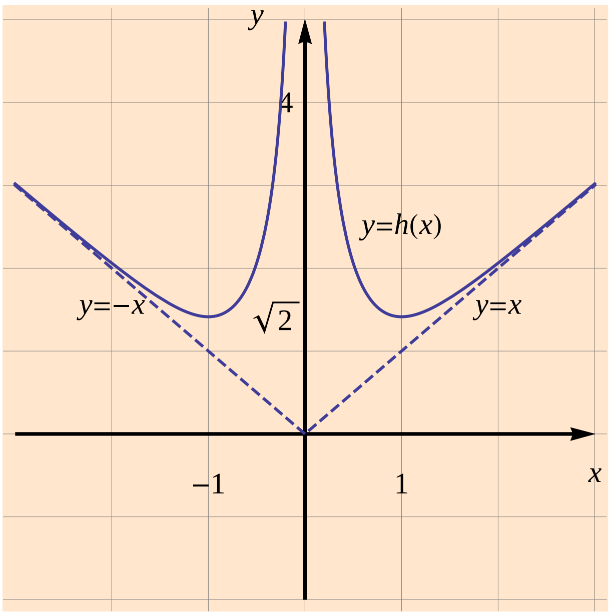
$$h'(x) = \frac{2x - \frac{2}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$

Teckenschema: Tecknet på derivatan beror endast på täljaren, som är

x	$<$	-1	$<$	0	$<$	1	$<$
$h'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$\min = \sqrt{2}$	$\nearrow$	Ej def.	$\searrow$	$\min = \sqrt{2}$	$\nearrow$

Svar:

* $D_h = \{x : x \neq 0\}$ och $V_h = [\sqrt{2}, \infty)$,
* Stationära punkter $(x, y) = (\pm 1, \sqrt{2})$, som är lokala minimipunkter.
* Lodrät asymptot $x = 0$ och sneda asymptoter $y = \pm x$ då $x \to \pm\infty$.
* Funktionens minsta värde är $\sqrt{2}$.
*



Ex: Konstruera kurvan $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

Lösning

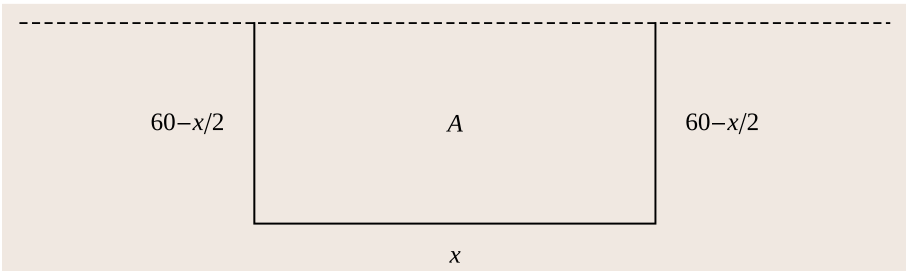
$$y = r(x) = \frac{x^3}{x^2-3},\ D_r = \{x :,\ x \neq \pm\sqrt{3}\},\ r'(x) = \frac{x^3}{x^2-3} = 0 \iff x = 0.$$

1.2 Max- och minproblem

Dessa kallas gemensamt för *extremvärdesproblem*

Ex: En strandtomt skall konstrueras med 120 meter staket, som en rektangel. En sida mot vattnet är utan staket och helt rak. Vilken är den största arean som den sådan tomt kan ha?

Lösning



Omkretsen är 120 (m) Låt sidan mot vattnet har längden x. Då är arean $A = A(x) = x \cdot (60 - x/2)$ med $D_A = \{x : 0 \leq x \leq 120\}$. Största värde återfinns i en stationär punkt eller i en ändpunkt. Nu är $A(0) = A(120) = 0$. Återstår

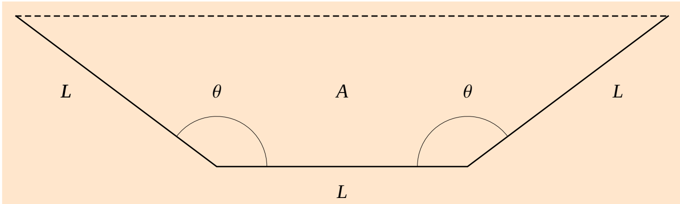
$$A'(x) = 60 - x = 0 \iff x = 60.$$

Teckenschema:

x	0	$<$	60	$<$	120
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	1800	$\searrow$	0

Svar: Största arean är 1800 m^2 och erhålls för $x = 60$ m.

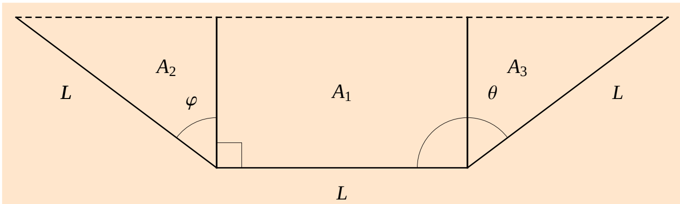
Ex: En ränna, i figuren sedd framifrån (som är snittytan, skall göras av tunn plåt med bredd $3L$, som skall vikas som i figuren.



Man vill ha så stort vattenflöde som möjligt genom rännan. Bestäm den största möjliga snittytan.

Lösning

Vi delar upp arean i tre delar enligt figuren nedan.



Arean är

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + 2A_2 = L^2 \cos\varphi + 2L^2 \cdot \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{2} =: A(\varphi).$$

där $A_2 = A_3$ och $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ är tillräckligt. Vi har en kontinuerlig funktion på $[0, \pi/2]$, så att ett största värde finns! Det antas antingen i intervallets ändpunkter eller i en stationär punkt (eller en inre punkt, där $A(\varphi)$ ej är deriverbar).
Ändpunkter:

$$A(0) = L^2, \text{ och } A(\pi/2) = 0.$$

Nu till inre punkter.

$$A'(\varphi)) = L^2(-\sin\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = L^2(1 - \sin\varphi - 2\sin^2\varphi) = 0.$$

Sätt $\sin\varphi = t$, så att $0 \le t \le 1$. Vi får ekvationen

$$0 = 2t^2 + t - 1 \iff t^2 + t/2 - 1/2 = 0 \iff t = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{1/16 + 1/2} = \frac{-1 \pm 3}{4}.$$

Vi får $t_1 = 1/2$ eller $t_2 = -1$. Alltså är $t = t_1 = 1/2 = \sin\varphi_1$ den som ger $\varphi_1 = \pi/6$. Man kan lätt konstatera att det motsvarar en lokal maximipunkt. Motsvarande area är

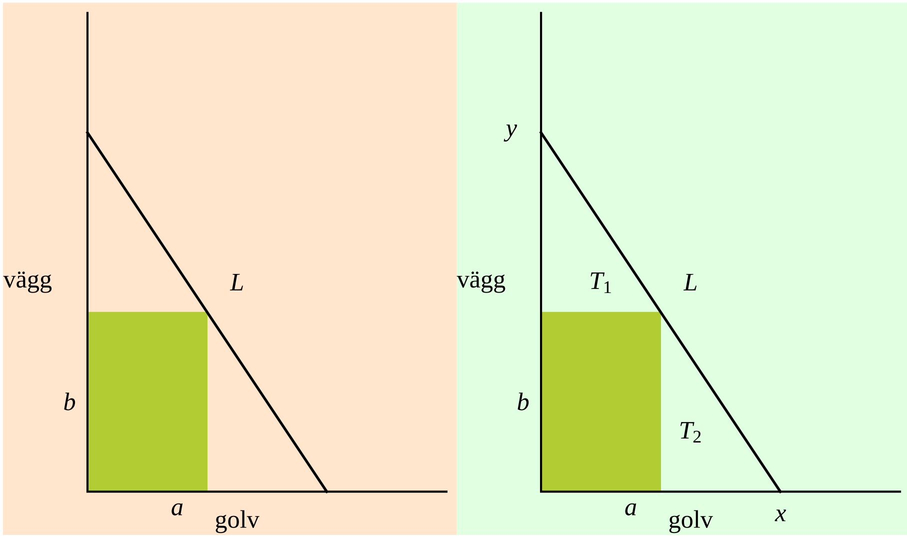
$$A(\pi/6) = L^2 \cdot (\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 \cdot 1/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot L^2.$$

Arean skall jämföras med $A(0) = L^2$.

Svar: Största arean är $= \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \cdot L^2$ och antas då $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Kommentarer: I den första uppgiften får vi en ytan halv kvadrat som ger störst area. I den andra uppgiften får vi ytan en halv regelbunden hexagon.

Ex: Givet en stege med längd L, som lutar mot ett rektangulärt block medbredd a och höjd b. Vilken är den minsta längden som L kan ha för att nå mellan golv och vägg?



Lösning

Vi inför koordinater och ytor, enligt figuren ovan t.h. Pythagoras sats ger $x^2 + y^2 = L^2$.
Likformighet för de två trianglarna ger

$$\frac{y-b}{a} = \frac{b}{x-a} \iff xy = bx + ay \iff y = \frac{bx}{x-a}.$$

Vi skall alltså minimera

$$L^2 := f(x) = x^2 + \left(\frac{bx}{x-a}\right)^2 \implies f'(x) = \frac{2x\left((x-a)^3 - ab^2\right)}{(x-a)^3}.$$

Ekvationen

$$f'(x) = 0 \iff x = a + a^{1/3}\, b^{2/3}.$$

Vi sätter in det i $L^2 = f(x)$ och får

$$L^2_{\min} = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^3 \text{ eller } L_{\min} = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}.$$

Ex.vis om $a = 27$ dm och $b = 64$ dm, är $L_{\min} = 125$ dm.

1.3 Implicit derivering

För vissa uttryck/ekvationer kan man eller vill man inte bestämma funktionen explicit. Ändå kan man beräkna funktionens värde och dess derivator i en given speciell punkt.

Ex: Sambandet $x^2 + y^2 = 1$ med $y = y(x) \geq 0$ är givet. Bestäm kurvan som beskrivs av sambandet och bestäm $y(0)$, $y'(0)$ och $y''(0)$.

Lösning

- Det är den övre halvcirkel av enhetscirkeln i planet.
- $x = 0$ ger $0^2 + y^2 = 1$, så $y = y(0) = 1$.
- Vi deriverar nu båda sidor m.p.a. x och får (Obs, $y^2 = (y(x))^2$ är sammansatt.)

$$2x + 2y \cdot y' = 0, \text{ där } 2y \text{ och } y' \text{ är y.d. resp. i.d..}$$

Insättning av $x = 0$ ger

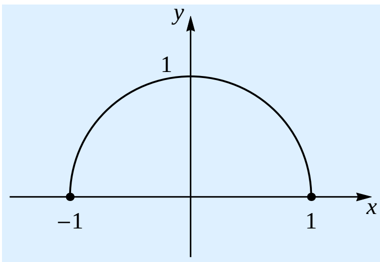
$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot y'(0) = 0 \Longrightarrow y'(0) = 0.$$

- Ytterligare en derivering ger

$$2 + 2(y'^2 + y \cdot y'') = 0.$$

Insättning av $x = 0$ ger

$$0 = 2+2(y'(0)^2+y(0)\cdot y'(0)) = 2+2(0+1\cdot y''(0)) \Longrightarrow y''(0) = -1.$$



Kommentar: Att $y'(0) = 0$ stämmer bra med att punkten $(0, 1)$ är en maxpunkt. Att dessutom andraderivatan $y''(0) = -1 < 0$ visar att $y'(x)$ är avtagande, vilket hör ihop med att $(0, 1)$ är en maxpunkt (och inte en minpunkt).