1 Potenser och logaritmer

1.1 Potenser

Definition 1.1

1. En potens är ett uttryck på formen

$$a^b, \quad \text{där } a \text{ kallas bas och } b \text{ kallas exponent.} \tag{1}$$

2. Potenser är definierade i följande fall:

   i) b är ett heltal eller $b = \frac{1}{n}$, där n är ett udda heltal och a ett godtyckligt reellt tal, undantaget $a = 0$ och $b < 0$.

   ii) $a > 0$ och b är ett godtyckligt reellt tal.

   iii) Speciellt definieras $0^0 = 1$.

3. För positiva heltal n definieras

$$\left.\begin{array}{rcl} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}} & = & a^n \\ a^{1/n} & = & \sqrt[n]{a} \end{array}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

4. Speciellt används basen $e \approx 2.71728$ i matematisk analys. e^x skrivs även $\exp(x)$.

Sats 1.1

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \tag{3}$$

Speciellt är $a^0 = 1, \qquad a^1 = a, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$

1.1.1 Prefix

Vard. namn	Betydelse	Namn	Beteckning	Betydelse	Namn	Beteckning
En triljon	10^{18}	eta	E	10^{-18}	$atto$	a
Ett tusen biljoner	10^{15}	$peta$	P	10^{-15}	$femto$	f
En biljon	10^{12}	$tera$	T	10^{-12}	$piko$	p
En miljard	10^{9}	$giga$	G	10^{-9}	$nano$	n
En miljon	10^{6}	$mega$	M	10^{-6}	$mikro$	μ
Ett tusen	10^{3}	$kilo$	k	10^{-3}	$milli$	m
Ett hundra	10^{2}	$hekto$	h	10^{-2}	$centi$	c
Tio	10^{1}	$deka$	da	10^{-1}	$deci$	d

(4)

1.2 Logaritmer

Definition 1.2

1. Antag att $b > 0$ och $b \neq 1$. Då definieras $b-$logaritmen för ett positivt tal a som den exponent $x = \log_b a$ sådant att $b^x = a$, d.v.s. $b^{\log_b a} = a$.
2. $\log_{10} a =: \lg a$ (10-logaritmen)
3. $\log_e a =: \ln a$ (e-logaritmen), där $e = \lim_{n \Longrightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \approx 2.71828$.

Sats 1.2 Logaritmlagarna med 10-bas; Om $a > 0$, $b > 0$ samt x godtyckligt reellt tal, så är

$$\begin{aligned} \lg(ab) &= \lg a + \lg b \\ \lg(a^x) &= x \lg a \\ \lg(a/b) &= \lg a - \lg b. \end{aligned} \tag{5}$$

Reglerna (5) gäller även för godtycklig bas, speciellt för basen e.

Kommentarer:

- Sambanden (5) gäller för godtycklig bas c (och alltså inte bara för $10-$bas.).
- $\ln$ kallas den naturliga logaritmen med e som bas.
- Den naturliga logaritmen, liksom 10-logaritmen, finns på miniräknaren.

- Sambandet mellan dessa två logaritmer ges av

$$x = e^{\ln x} = 10^{\lg x} = e^{\ln 10 \cdot \lg x} \Longleftrightarrow \ln x = \ln 10 \cdot \lg x$$

Sats 1.3

$$\frac{\lg x}{\lg y} = \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}, \qquad \text{om } a > 0, \quad a \neq 1 \text{ samt } x > 0, y > 0\,. \tag{6}$$

Om $a, b, c, d > 0$ och samtliga $\neq 1$ så gäller

$$\frac{\ln a}{\ln b} = \log_b a, \qquad \frac{\log_a b}{\log_c d} = \frac{\log_d c}{\log_b a}, \qquad \frac{1}{\log_a b} = \log_b a, \qquad \frac{\log_a b}{x} = \log_{a^x} b \quad (x \neq 0), \quad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}\,. \tag{7}$$

Tillämpning

- Enheten Decibel, dB är en logaritmisk enhet av ljudnivån L och definieras som

$$L = 120 + 10 \lg I \text{ (dB)},$$

där I är ljudnivån i W/m^2.