Lösningsförslag till tentamen i matematik, Kurs L9MA20/LGMA20, 20160603

1. Beräkna följande gränsvärden...

(a)
$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{4+7x-2x^2} = \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(-2x-1)} = \lim_{x\to 4}\frac{2}{(-2x-1)} = \frac{2}{-9} = -\frac{2}{9}.$$

(b)
$$(1-2x)^{1/\sin x} = \left[\left(1+\frac{1}{1/(-2x)}\right)^{1/(-2x)}\right]^{-2x/\sin x} \to e^{-2} \text{ då } x\to 0.$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{2x+1}{1-2x\sqrt{3}}\right) = \lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{2+1/x}{1/x-2\sqrt{3}}\right) = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}.$$

2. Beräkna integralerna...

(a)
$$\int_{-2}^{10}\frac{1}{2x+7}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{27}{3}\right) = \ln 3\,.$$

(b)
$$\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{x}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{V.S. } x=t^2,\ \sqrt{x}=t\\ dx=2t\,dt,\ 0\le t\le\pi\end{array}\right\} = 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = \{\text{P.I.}\} = [-2t\cos t]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos t dt = 2\pi\,.$$

(c)
$$\int \tan^2 x\,dx = \int\left[(\tan^2 x+1)-1\right]dx = \tan x - x + C\,.$$

3. (a) Konstruera kurvan $y=\dfrac{x^2}{x-3} =: g(x)$...

Lösning:

- $D_g=\{x : x\neq 3\}$.
- Lodräta asymptoter

$$\begin{cases} x\to 3_- & \text{tälj}\to 9.\\ & \text{nämn}\to 0_-\end{cases} \Longrightarrow g(x)\longrightarrow -\infty, \qquad \begin{cases} x\to 3_+ & \text{tälj}\to 9.\\ & \text{nämn}\to 0_+\end{cases} \Longrightarrow g(x)\longrightarrow \infty.$$

D.v.s. $x=3$ är lodrät asymptot.

- Sneda asymptoter

$$g(x)=\frac{x^2}{x-3} = \{\text{Pol. div.}\}\frac{x^2-9+9}{x-3} = x+3+\frac{9}{x-3} \Longrightarrow y=x+3 \text{ sned asymptot}\,.$$

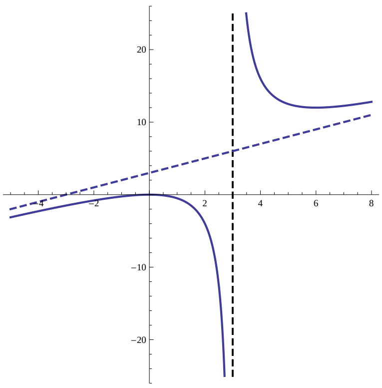
- Stationära punkter:

$$g'(x)=\ldots=\frac{(x-6)x}{(x-3)^2}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=6\end{cases}$$

- Teckenschema:

x	$<$	0	$<$	3	$<$	6	$<$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	ej. def.	$-$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	ej. def.	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$
		0				12	

Svar (a): $D_g=\{x:\ x\neq 3\}$, Lodrät asymptot $x=3$, sned asymptot $y=x+3$.
Lokal maxpunkt $(0,0)$, lokal minpunkt $(6,12)$, ingen terrasspunkt.



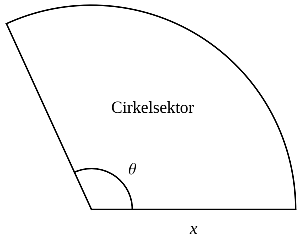
Svar (b): $g''(x)=\dfrac{18}{(x-3)^3}<0$, om $x<3$ och >0, om $x>3$. Alltså konkav för $x<3$ och konvex för $x>3$.

4. (a) Kroppens volym är

$$\pi\int_1^2\frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx = \left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}+\ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

(b) Kroppens volym är

$$\lim_{b\longrightarrow\infty} \pi \int_1^b \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty} \pi\left[\ln(1+1/b) - \frac{1}{b} - \ln\frac{1+1}{1} + \frac{1}{1}\right] = \pi\,(1-\ln 2)$$



5. En cirkelsektor med omkrets 2 dm är given, se figur...

Lösning: Omkrets $\mathcal{O} = 2x + \theta x = 2$ (dm), där vi kan lösa ut

$$\theta = \frac{2-2x}{x} = 2\cdot\frac{1-x}{x}\,.$$

och area

$$A = \frac{\theta x^2}{2} = \frac{2(1-x)x^2}{2x} = (1-x)x \Longrightarrow A'(x) = 1-2x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\,.$$

Alltså är

$$A_{\max} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ \text{dm}^2,\ \text{som antas då}\ \begin{cases}\theta & = 2\ \text{(rad.)}\\ x & = \frac{1}{2}\ \text{(radien)}\\ \theta\,x & = 1\ \text{(cirkelbågens längd)}\end{cases}$$

6. (a) **Definition:**
En funktion $f(x)$ är deriverbar i x, om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existerar. Om grändsvärdet existerar, skrivs det $f'(x)$ och kallas derivatan av f.

(b) Derivera funktionen $f(x) = \sqrt{x^2+1}$...

Lösning: Differenskvoten är

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{((x+h)^2+1)^{1/2} - (x^2+1)^{1/2}}{h}\cdot\frac{((x+h)^2+1)^{1/2} + (x^2+1)^{1/2}}{((x+h)^2+1)^{1/2} + (x^2+1)^{1/2}} =$$

$$\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h\left[((x+h)^2+1)^{1/2}+(x^2+1)^{1/2}\right]} = \frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}\left[((x+h)^2+1)^{1/2}+(x^2+1)^{1/2}\right]} \longrightarrow \frac{2x}{2(x^2+1)^{1/2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

då $h\longrightarrow 0$.
