Lösningsförslag till tentamen i matematik, Kurs L9MA20/LGMA20, 20160825, torsdag e.m. 14.00-18.00

1. Beräkna följande gränsvärden...

   (a)
   $$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2x^2-5x-3}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(2x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{7}\,.$$

   (b) Sätt $x = 1/n$. Gränsvärdet kan då skrivas
   $$\lim_{n\to\pm\infty}\left[(1+(-\sin(2/n)))^{-\sin(2/n)}\right]^{-\frac{2/n}{\sin(2/n)\cdot 2}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

   (c)
   $$\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{2+1/x}{\sqrt{3}/x-2}\right)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}\,.$$

   1.0p+2.0p+1.5p

2. Beräkna integralerna

   (a)
   $$\int_1^e \ln x\,dx=\{\text{P.I.}\}=[x\ln x-x]_1^e=e\ln e-e-(1\ln 1-1)=1.$$

   (b)
   $$\int_0^{\sqrt{2}} x\,e^{-x^2/2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{e}.$$

   (c)
   $$\int\tan^2 x\,dx=\int(1+\tan^2 x-1)dx=\tan x-x+C\,.$$

   1.0p+2.0p+1.5p

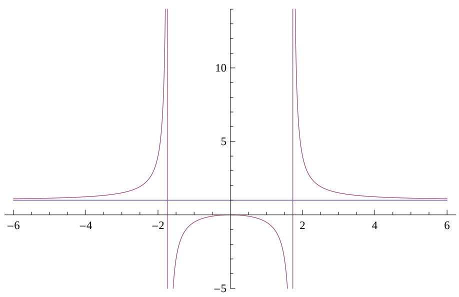
3. (a) Konstruera kurvan $y=\dfrac{x^2}{x^2-3}=:f(x)$...

   Lösning:

$D_f=\{x:\ x\neq\pm\sqrt{3}\}$	$f(x)=1+\dfrac{3}{x^2-3}$
lodräta asymptoter $x=\pm\sqrt{3}$	Sned asymptot $y=1$
$f'(x)=-\dfrac{6x}{(x^2-3)^2}$	stat. pkt $x=0$
lok. max. $(x,y)=(0,0)$	$V_f=\{y:\ y>1\vee y\leq 0\}$

   Teckenschema:

x	$<$	$-\sqrt{3}$	$<$	0	$<$	$\sqrt{3}$	$<$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$

   3.0p

   (b) Avgör var funktionen är konvex eller konkav...
   $$f''(x)=\frac{18\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-3\right)^3}\begin{cases}>0, & \text{om } x<-\sqrt{3}\text{ eller } x>\sqrt{3}\\ <0, & \text{om } -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.\end{cases}\implies\begin{cases}\text{konvex om } x<-3\text{ eller } x>\sqrt{3}\\ \text{konkav om } -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.\end{cases}$$

   1.0p

4. (a) Kroppens volym
   $$V=\pi\int_0^2 f(x)^2dx=\pi\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4\pi}{3}.$$

   3.0p

(b) Halva volymen, jämfört med (a), erhålls om samma yta med $0 \leq x \leq 1$ roterar kring $x-$axeln.
Detta beror på att funktionen/integranden i kvadrat $2x - x^2$ är *symmetrisk* m.a.p. linjen $x = 1$:

$$f(2-x)^2 = 2(2-x)-(2-x)^2 = (2-x)(2-(2-x)) = (2-x)x = 2x-x^2 = f(x)^2.$$

1.0p

5. $A = x^2 \, \frac{\theta}{2}$ med omkrets

$$2x + \theta x = 2 \Longleftrightarrow \theta = \frac{2(1-x)}{x}.$$

Insatt i cirkelsektorns area får vi

$$A = A(x) = x^2 \, \frac{2(1-x)}{2x} = x(1-x) \Longrightarrow A'(x) = 1 - 2x = 0$$

med rot $x = 1/2$. Störst area, etc, är

$$A(1/2) = \frac{1}{4} \text{ a.e. med } \theta = 2 \text{ och radie } x = \frac{1}{2}.$$

6. (a) Definiera begreppet kontinuitet m.h.a. $\varepsilon - \delta$...

För varje $\varepsilon > 0$ finns det ett $\delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(b) Visa med $\varepsilon - \delta-$ defintionen att $f(x) = k\,x + m$ är kontinuerlig...
Tag ett godtyckligt $x_0 \in D_f$. Tag ett gostyckligt $\varepsilon > 0$. Vi sätter

$$|f(x) - f(x_0)| = |k(x - x_0)| < \varepsilon.$$

Det är sant för $k = 0$ oberoende av valet av $\delta > 0$. Antag $k \neq 0$.

$$|f(x) - f(x_0)| = |k(x - x_0)| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|k|} = |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Välj $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$. Då gäller

$$|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{|k|} \Longleftrightarrow |k|\,|x - x_0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Detta avslutar beviset. 2.0p+2.0p

Maximal poäng på tentamen, 24p
Låt x vara poängsumman och b var antal bonuspoäng.
Betyg U (underkänt) om $x + b < 11.0$.
Betyg G om $11.0 \leq x + b < 18.0$.
Betyg VG om $18.0 \leq x + b$.