Tentamen i LMA210 Statistik för lärare

Fredag 13 november 2009 kl 8.30-13.30, sal V.
Examinator: Magnus Röding.
Jour: Anna Rudvik, tel nr 0730-579626 alt. 031-7725338.
Hjälpmedel: Formelsamling som delas ut tillsammans med tentamenstesen, valfri miniräknare samt ett A4-ark med egna handskrivna anteckningar (får vara dubbelsidigt).
Gränser: Maximal poäng är 30. För godkänd krävs 12 poäng och för väl godkänd 21 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggan i sannolikhetsteori den 3/11 2009 adderas till tentamensresultatet.
Observera att lösningar och motiveringar ska redovisas till varje uppgift, att denna tentamenstes är tvåsidig, samt att uppgifter inte är ordnade efter svårighetsgrad.
Tentamen är rättad senast efter 3 veckor.

---

1. För en diskret stokastisk variabel X gäller att $P(X = 1) = c$, $P(X = 2) = 2c$ och $P(X = 3) = 3c$, där $c > 0$ är en konstant. X antar inga andra värden än 1,2 eller 3.

   (a) Bestäm konstanten c. (1p)

   (b) Beräkna $E[X]$. (1p)

   (c) Beräkna $E[2^X]$. (1p)

2. Varje eftermiddag tittar Pelle ut genom sitt fönster i en timmes tid mot en fågelholk. Sannolikheten att få se en fågel är lika stor hela tiden, och Pelle kan förvänta sig att få se 1 fågel i timmen. Anta nu att alla fåglars beteende är oberoende av varann och antalet fåglar en dag är oberoende av antalet fåglar en annan dag. Hur stor är då sannolikheten att Pelle inte får se en enda fågel på en hel vecka? (2p)

3. X och Y är två binära stokastiska variabler, som alltså bådadera kan anta värdena noll eller ett. Deras simultana sannolikhetsfunktion p_{XY} har värdena $p_{XY}(0,0) = 1/4$, $p_{XY}(0,1) = p_{XY}(1,0) = 1/8$ och $p_{XY}(1,1) = 1/2$.

   (a) Bestäm $P(X = 0)$. (1p)

   (b) Bestäm P(X+Y=1). (1p)

   (c) Är X och Y oberoende? (2p)

4. Anta att X är en kontinuerlig stokastisk variabel, likformigt fördelad på $[0, 1]$. Betrakta nu den stokastiska variabeln $Y = [3X^2]$, där $[a]$ är det största heltalet $\leq a$. Y är en diskret stokastisk variabel. Bestäm dess fördelningsfunktion. (3p)

5. Ur en grupp av 23500 studenter tillfrågades 97 slumpvis utvalda om de brukar gå på afterwork på fredagkvällarna. 57 svarade ja och resten nej. Konstruera ett 95 % konfidensintervall för andelen studenter som brukar gå på afterwork på fredagkvällarna, baserat på dessa data. Ger detta intervall någon grund för att påstå att fler än hälften av studenterna gör detta? (4p)

6. Kalle har köpt två påsar med bananer i två olika butiker i Landala. I den första påsen har han fem bananer med längderna 15.2, 16.2, 15.7, 17.5 och 16.2 cm. I den andra påsen har han fyra bananer med längderna 18.5, 17.5, 17.6 och 16.4 cm. Antag att de köpta bananerna utgör två oberoende stickprov (även med oberoende observationer inom varje stickprov), från en $N(\mu_1, \sigma)$-fördelning respektive en $N(\mu_2, \sigma)$-fördelning för vardera påsen. Bestäm ett 95 % konfidensintervall för skillnaden i medellängd, $\mu_1 - \mu_2$. (4p)

7. (a) Anta att man har två stickprov av storlek n_X respektive n_Y, med stickprovsvarians s_X^2 respektive s_Y^2. Om man har anledning att tro att de två stickproven kommer från fördelningar med samma varians σ^2 (kanske till och med från samma fördelning, även det inte måste vara så), så kan man skatta σ^2 med den så kallade *pooled variance* eller

$$s_p^2 = \frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}. \tag{1}$$

Vad är anledningen till att man väljer denna skattning istället för till exempel s_X^2 eller s_Y^2? Beskriv med egna ord, formler behövs inte. (2p)

(b) Låt X_1,X_2,...,X_n vara stokastiska variabler. Alla följer samma fördelning med väntevärde $\mu = E[X_i]$. Dessa svarar mot n oberoende observationer från denna fördelning. Visa att vår vanliga skattning av väntevärde, alltså det så kallade stickprovsmedelvärdet,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \tag{2}$$

är väntevärdesriktig. (2p)

8. Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler. Anta att både X och Y har väntevärde och varians lika med 1. Beräkna variansen av deras *produkt*, $V(XY)$. (3p)

9. Emma gör 100 oberoende tärningskast och räknar hur många gånger hon får en trea eller högre. Hur stor är sannolikheten att hon får trea eller högre 70 gånger eller fler? Naturligtvis får du anta att tärningen är rättvis, det vill säga fördelningen är likformig över utfallsrummet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (3p)

Lycka till!