Tentamen i LMA210 Statistik för lärare

Fredag 11 november 2011 kl 8.30-12.30, sal V.
Examinator och jour: Magnus Röding, tel nr 0733-932195 alt. 031-7724992.
Hjälpmedel: Formelsamling och fördelningstabeller som delas ut tillsammans med tentamenstesen, valfri miniräknare samt ett A4-ark med egna handskrivna anteckningar (får vara dubbelsidigt).
Gränser: Maximal poäng är 30. För godkänd krävs 12 poäng och för väl godkänd 21 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggan i sannolikhetsteori den 1/11 2011 adderas till tentamensresultatet.
Observera att lösningar och motiveringar ska redovisas till varje uppgift, att denna tentamenstes är flersidig, samt att uppgifter inte är ordnade efter svårighetsgrad.
Tentamen är rättad senast efter 3 veckor.

---

1. Låt X vara en Bernoullifördelad stokastisk variabel med $P(X = 1) = p$ och $P(X = 0) = 1 - p$ för något p mellan 0 och 1.
   (a) Bestäm $V(X)$. (1p)
   (b) Bestäm $E[2^X]$. (1p)
   (c) Bestäm $E[X^3]$. (1p)

2. Låt A och B vara två händelser i något utfallsrum Ω. Visa att Bonferronis olikhet $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ gäller. (1p)

3. Låt A, B och C vara tre händelser i något utfallsrum Ω. Anta att $P(A|C) > P(B|C)$ och $P(A|C^c) > P(B|C^c)$, där C^c är komplementhändelsen till C, så att $C \cup C^c = \Omega$ och $C \cap C^c = \emptyset$. Visa att det då gäller att $P(A) > P(B)$. (2p)

4. Låt A och B vara oberoende händelser, alltså gäller att $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ enligt definitionen av oberoende. Använd räkneregler för sannolikheter för att visa att $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$, och därmed visa att även komplementhändelserna A^c och B^c är oberoende. (3p)

5. Låt X och Y vara två stokastiska variabler som har samma varians (och inte nödvändigtvis är okorrelerade). Visa att $X + Y$ och $X - Y$ är okorrelerade, det vill säga visa att kovariansen $C(X + Y, X - Y) = 0$. (3p)

6. Under en dag tillfrågades 100 slumpvis utvalda personer ur hela befolkningen om de äter gröt till frukost. 19 svarade ja och resten nej. Konstruera ett 95 % konfidensintervall för andelen personer som äter gröt till frukost, baserat på dessa observationer. Ger detta intervall någon grund för att påstå att mindre än en fjärdedel av befolkningen äter gröt till frukost? (4p)

7. Ett oberoende forskningsinstitut undersöker den faktiska effekten hos två modeller av 60 W glödlampor. Fem undersökta lampor av den första modellen ger värdena 58.29, 57.31, 59.91, 58.79 och 58.16 W. Fyra undersökta lampor av den andra modellen ger värdena 58.94, 60.96, 59.42 och 60.52 W. Antag att dessa värden utgör två oberoende stickprov (även med oberoende observationer inom varje stickprov), från en $N(\mu_1, \sigma)$-fördelning respektive en $N(\mu_2, \sigma)$-fördelning för vardera sortens lampa. Bestäm ett 95 % konfidensintervall för skillnaden i genomsnittlig effekt, alltså $\mu_1 - \mu_2$. (4p)

8. (a) Anta att man gör 100 oberoende tärningskast och räknar hur många gånger man får en trea eller högre. Hur stor är sannolikheten att man får trea eller högre 70 gånger eller fler? Naturligtvis får du anta att tärningen är rättvis, det vill säga fördelningen är likformig över utfallsrummet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (3p)

   (b) Anta istället att man kastar tärningen tills man får en trea eller högre första gången. Hur många kast krävs i genomsnitt då? (2p)

9. Låt X_1,X_2,...,X_n vara stokastiska variabler. Dessa svarar mot n oberoende observationer från en och samma fördelning med väntevärde $\mu = E[X_i]$ och standardavvikelse $\sigma = D[X_i]$.

   (a) Visa att vår vanliga skattning av väntevärde, alltså det så kallade stickprovsmedelvärdet,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}, \tag{1}$$

   är väntevärdesriktig, det vill säga att $E[\bar{X}] = \mu$. (2p)

   (b) Visa att skattningen för variansen, stickprovsvariansen,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2, \tag{2}$$

   också är väntevärdesriktig, det vill säga $E[S^2] = \sigma^2$. Detta är lite svårare, men utgå från följande. I varje term i summan ovan kan vi utveckla kvadraten och skriva

$$\begin{aligned}(X_i - \bar{X})^2 = X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2 = X_i^2 - \frac{2}{n}X_i(X_1 + ... + X_n) + ...\\ + \frac{1}{n^2}(X_1^2 + ... + X_n^2 + X_1X_2 + X_1X_3 + ... + X_nX_{n-1} + X_nX_n),\end{aligned} \tag{3}$$

   där vi i sista parentesen har delat upp i kvadratiska termer typ X_1^2 och blandade termer typ X_1X_2 (och även X_2X_1). (3p)

Lycka till!