

Tentamen LMA210
Statistik för lärare,
2012-08-23 kl 8.30-12.30.

Examinator och Jour: Malin Östensson, tel 0708347877

Hjälpmedel: valfri miniräknare, (dubbelsidigt) A4 ark med egna anteckningar samt med skrivningen utdelade tabellsidor och formelsamling.

Maxpoäng: 30. För godkänd krävs minst 12 p, för Väl Godkänd 21 p.

Eventuell bonuspoäng från dugga 1/11 2011 adderas. Lösningar skall redovisas till varje uppgift. Uppgifterna är ej ordnade efter svårighetsgrad.

Rättningsprotokoll anslås senast tre veckor efter tentamen

1. Bevisa att om det för två disjunkta händelser A och B gäller att $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$, så kan A och B ej vara oberoende.

3 p

2. Antag att X är en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

där c är en konstant.

- (a) Bestäm konstanten c .

1 p

- (b) Beräkna väntevärdet $\mathbf{E}[X]$?

1 p

- (c) Vad har X för sannolikhetsfunktion $F_X(x)$.

1 p

3. I en satellit körs två separata datorsystem. Vi kallar dem det primära och det sekundära. Om det primära slutar fungera är tanken att det sekundära ska ta över. Antag att det primära fungerar med sannolikhet 0.95, och det sekundära med sannolikhet 0.80. Antag att minst ett av systemen fungerar med sannolikhet 0.99. Vad är sannolikheten att bägge systemen fungerar?

3 p

4. Ur en grupp av 23 500 studenter tillfrågades 97 slumpvis utvalda personer om de brukar gå på afterwork på fredag kvällarna. 57 av dem svarade ja och resterande nej. Konstruera ett 95% konfidensintervall för andelen studenter som brukar gå på afterwork på fredag kvällarna, baserat på dessa data.

Finns det grund för att påstå att fler än hälften av studenterna gör detta?

4 p

5. Kalle har köpt två påsar med bananer i två olika butiker i Landa-la. I den första påsen har han fem bananer med längderna 15.2, 16.2, 15.7, 17.5 och 16.2 cm. I den andra påsen har han fyra bananer med längderna 18.5, 17.5, 17.6 och 16.4 cm. Antag att de köpta bananerna utgör två oberoende stickprov, från en $N(\mu_1, \sigma)$ -fördelning, resp. en $N(\mu_2, \sigma)$ -fördelning för vardera påsen. Bestäm ett 95% konfidensintervall för skillnaden i medellängd, $\mu_1 - \mu_2$.

4 p

6. Visa följande räkneregler för varians och kovarians:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X, Y)$$

för två stokastiska variabler X och Y . Du får använda. Du får använda räkneregler för väntevärden, det är också okej att gå tillbaka till definitionen. Om du väljer det senare, så väljer du själv om du vill undersöka det diskreta eller det kontinuerliga fallet

2 p

7. X and Y är två binära stokastiska variabler, som alltså antar värdena 0 och 1. Deras simultana sannolikhetsfunktion p_{XY} har värdena $p_{XY}(0, 0) = 1/4$, $p_{XY}(0, 1) = p_{XY}(1, 0) = 1/8$ och $p_{XY}(1, 1) = 1/2$.

Bestäm

(a) $P(X = 0)$

1 p

(b) $P(X + Y = 1)$

1 p

(c) $P(X = 0|Y = 1)$

1 p

8. Låt X vara en stokastisk variabel, likformigt fördelad på intervallet $[a, b]$, $b > a$. Beräkna

(a) $\mathbf{E}[X]$

1 p

(b) $\mathbf{E}[X^2]$

1 p

(c) $\text{Var}(X)$ ($V(X)$).

1 p

9. (a) Antag att man har två stickprov av storlek n_X resp. n_Y med stickprovsvarians s_X^2 resp. s_Y^2 . Om man har anledning att tro att de två stickproven kommer från fördelningar med samma varians σ^2 (kanske t.o.m samma fördelning) så kan man skatta σ^2 med den s.k. 'pooled variance';

$$s_p^2 = \frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

Vad är anledningen till att man väljer denna skattning istället för t.ex. s_X^2 eller s_Y^2 . Beskriv kort med egna ord, formler behövs inte.

2 p

- (b) Låt $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende stickprov från en och samma fördelning, som är sådan att $\mathbf{E}[X_i] = \mu$. Visa att vår vanliga skattare av medelvärde;

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

är väntevärdesriktig (unbiased), alltså att den uppfyller $\mathbf{E}[\bar{X}] = \mu$.

3 p

Ledning: Utveckla $\mathbf{E}[\bar{X}]$ m.h.a. räkneregler för väntevärde.

Lycka till!