
FACIT: Hemdugga L9MA30, LGMA30

Matematik 3 för lärare, åk 7-9, Sannolikhetslära och statistik,
Matematik 3 för gymnasielärare, Sannolikhetslära och statistik

Sista inlämningsdag 2013-10-01 kl. 10.00

Examinator: Henrike Häbel, tel. 073 0671252 alt. 031 772 5380

Ger maximalt 3 bonus poäng (10%) till tentamen:

Dugga poäng	12	15	18	21	24	27
Bonus poäng	0.5	1	1.5	2	2.5	3

-
1. Anna och Petter spelar Trivial Pursuit. Anna måste slå 3 med tärningen för att gå i mål. Låt A vara händelsen att *få en 3:a på tärningen*.

a) Förklara med egna ord händelsen $B = A^c$ och beräkna $\mathbb{P}(B)$.

1p

b) Är händelserna A och B oberoende? Motivera ditt svar.

1p

c) När Anna har hamnat i mål, kommer Petter, slumpmässigt och utan att titta på nästa frågekort, att bestämma från vilken kategori Anna ska svara på den sista, avgörande frågan för att ta hem spelet. Anna är bra på 'underhållning', 'natur och vetenskap' och 'platser'. På frågor från de tre kategorierna svarar hon rätt med 80% sannolikhet och på frågor från de tre övriga kategorierna bara med 40% sannolikhet. Rita träd diagram och beräkna sannolikheten för händelsen $C = \text{Anna svarar rätt}$.

2p

d) Låt händelserna A och C vara oberoende. Vad är sannolikheten att Anna vinner?

1p

e) Anta att Anna har hamnat i mål. Givet att hon svarar rätt på den sista frågan, vad är sannolikheten att Petter har valt kategori 'nu och då'?

1p

Lösningsförslag:

- a) Anna slå 1,2,4,5,6 med tärningen och hamnar inte i mitten.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{5}{6}$$

- b) Händelser A och B är ej oberoende händelser eftersom de är disjunkta.

c)

$$\mathbb{P}(C) = 0.4 + 0.2 = 0.6 = \frac{3}{5}$$

d)

$$\mathbb{P}(A \cap C) \stackrel{\text{obero}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \frac{3}{5} = 0.1$$

- e) Låt D_1 vara händelse att *kategori är 'nu och då'*.

$$\mathbb{P}(D_1|C) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(C|D_1)}{\sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(D_i)\mathbb{P}(C|D_i)} = \frac{\frac{1}{6} \frac{4}{10}}{3 \frac{1}{6} \frac{8}{10} + 3 \frac{1}{6} \frac{4}{10}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{9}$$

2. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler med $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Visa följande formel för variansen.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

3p

Ledning: Du kan använda räkneregler för väntevärdet.

Lösningsförslag:

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 = \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ &= (\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2)) - ((\mathbb{E}(X))^2 + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2) \\ &= (\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2) + (\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2) + \underbrace{2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))}_{=0} = V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

3. Vi gör en serie av n lika och oberoende försök. Låt $X_i \sim \text{Be}(p)$, $i = 1, \dots, n$, så att $\mathbb{P}(Y_i \text{ lyckas}) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ och $\mathbb{P}(Y_i \text{ misslyckas}) = \mathbb{P}(Y_i = 0) = (1 - p)$. Låt $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

- a) Beskriv med egna ord vad Y är. Hur är Y fördelat?

2p

- b) Beräkna väntevärdet $\mathbb{E}(2^Y)$.

1p

- c) Förklara hur den geometriska fördelningen kommer till.

2p

Lösningsförslag:

- a) Y är antal försök som lyckades. $Y \sim \text{Bin}(n, p)$.

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2^X) &= \mathbb{E}(2_1^Y * \dots * 2_n^Y) = \underbrace{(2^0(1-p) + 2^1p) * \dots * (2^0(1-p) + 2^1p)}_{n \text{ gånger}} \\ &= (1-p+2p)^n = (1+p)^n\end{aligned}$$

c) Kortfattat: Vi har k försök. Binomialkoefficienten behövs inte eftersom vi vet att bara den sista försök lyckas.

4. Antag att antalet hjortar som springer igenom ett visst skogsparti en dag är Poissonfördelat med parameter $\lambda = 4.4$.

a) På en slumpmässigt valt dag, vad är den förväntade antalet hjortar som springer igenom skogspartiet?

1p

b) Vad är sannolikheten att högst 3 hjortar springer igenom under en dag?

1p

c) Givet att det springer igenom 3 eller 5 hjortar under en dag, vad är den betingade sannolikheten att det springer igenom 5 hjortar?

2p

Lösningsförslag:

a)

$$\mathbb{E}(X) = \lambda = 4.4$$

b)

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = 0.3594$$

c)

$$\mathbb{P}(X = 5 | X = 3 \text{ eller } 5) = \frac{\mathbb{P}(X = 5)}{\underbrace{\text{Prob}(X = 3)}_{=0.3594-0.1851=0.1743} + \underbrace{\mathbb{P}(X = 5)}_{=0.7199-0.5512=0.1687}} = 0.4918$$

5. Antag att X är en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) Visa att $f_X(x)$ är en täthetsfunktion.

1p

b) Beräkna väntevärdet $\mathbb{E}(X)$.

1p

c) Beräkna sannolikhetsfunktionen $F_X(x)$ och sannolikheten $\mathbb{P}(1/2 < x < 3/2)$.

1p

Lösningsförslag:

- a) $f_X(x) \in [0, 3/2]$, så gäller $f_X(x) \geq 0$ och

$$\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x^2)dx = \left[\frac{1}{2}x(3-x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(2) = 1$$

- b)

$$\int_0^1 x \frac{3}{2}(1-x^2)dx = \left[\frac{3}{8}x^2(2-x^2) \right]_0^1 = \frac{3}{8}(1) = \frac{3}{8}$$

- c)

$$F_X(x) \stackrel{a)}{=} \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x(3-x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

och

$$\mathbb{P}(1/2 < x < 3/2) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{c)}{=} 1 - \frac{1}{2*2} \left(3 - \frac{1}{2^2}\right) = 0.3125$$

6. Ur en grupp om 1000 personer tillfrågades 236 slumpvis utvalda personer om de gillar Angela Merkel. 99 svarade ja och resten nej. Vad är sannolikheten att mer än hälften av personerna i gruppen gillar Angela Merkel?

3p

Lösningsförslag: Låt X vara antalet personer som gillar Angela Merkel.

$$\hat{p} = \frac{99}{236} = 0.42 \Rightarrow 236 * 0.42 * 0.58 \approx 57 > 10$$

Binomialapproximation: $X \sim N\left(236 * 0.42, \sqrt{236 * 0.42 * 0.58}\right) = N(99, 7.582)$

$$\mathbb{P}(X \leq 236/2) = \Phi\left(\frac{118 - 99}{7.582}\right) = \Phi(2.51) = 0.994$$

och därmed

$$\mathbb{P}(X > 118) = 1 - 0.994 = 0.006.$$

7. Betrakta den följande simultana sannolikhetsfunktionen för X , betyget i statistiktentamen, och Y , betyget i matematiktentamen, med värdena Underkänd (1), Godkänd (2) och Väl Godkänd (3).

(X, Y)	1	2	3
1	0	0.1	0.05
2	0.1	0.15	0.2
3	0.05	0.1	c

- a) Bestäm konstanten $c \in \mathbb{R}$.

1p

- b) Bestäm sannolikheten $\mathbb{P}(X = 2)$.

1p

- c) Vad är sannolikheten att statistik-betyget är 2 eller 3 om matematik-betyget är 1?

2p

Lösningsförslag:

a)

$$c = \mathbb{P}(X = 3|Y = 3) = 1 - 0.1 - 0.05 - 0.1 - 0.15 - 0.2 - 0.05 - 0.1 = 0.25$$

b)

$$\mathbb{P}(X = 2) = 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X = 2) \cup (X = 3)|Y = 1) &\stackrel{disj}{=} \mathbb{P}(X = 2|Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3|Y = 1) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = 2 \cap Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} + \frac{\mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} \\ &= \frac{0.1 + 0.05}{0.15} = 1 \end{aligned}$$

eftersom

$$\mathbb{P}(Y = 1) = 0.1 + 0.05 = 0.15$$