Kortfattade lösningar till tentamen i Statistik för lärare 23/aug-12

1. Anta A och B oberoende. Då $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Men $A \cap B = \emptyset$ ty A och B disjunkta

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Samtidigt $P(A) > 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A)P(B) > 0$

$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

$\Rightarrow$ vi har inte oberoende

2 (a) $\int_1^2 cx\,dx = c \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow \underline{c = \frac{2}{3}}$

(b) $E[X] = \int_1^2 cx^2 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} = \underline{\frac{14}{9}}$

(c) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \int_1^x cx'dx' = \frac{1}{3}(x^2-1) & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$

3. A = primärt fungerar, B = sekundärt fungerar

$P(A) = 0.95$, $P(B) = 0.80$, $P(A \cup B) = 0.99$

Söker $P(A \cap B)$

Använder $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.95 + 0.80 - 0.99 =$

$= \underline{0.76}$

VÄND

4. Antalet studenter som svarar ja är Bin(97, p)-fördelat, där p är den verkliga proportionen i hela populationen som går på afterwork
Skattar p enl.

$$\hat{p} = \frac{57}{97} \approx 0.5876$$

För tillräckligt stort stickprov ($\gtrsim 30$) kan vi approximera binomialfördelningen med en normalfördelning. Ett approximativt konfidensintervall fås då som

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

där $n = 97$, $z_{\alpha/2} = 1.96$, ($\alpha = 0.05$)

$$\Rightarrow \quad 0.5876 \pm 0.0980 \Leftrightarrow [0.4897, 0.6856]$$

Konfidensintervallet innehåller värden < 0.50 $\Rightarrow$ data ger på denna signifikansnivå inte grund för påståendet $p > 0.50$.

5. Skatta medelvärden och varianser:

$$\bar{X}_1 = (15.2 + 16.2 + 15.7 + 17.5 + 16.2)/5 = 16.16$$
$$\bar{X}_2 = (18.2 + 17.5 + 17.6 + 16.4)/4 = 17.5$$

$s_1^2 = 0.7330$; $s_2^2 = 0.74$

pooled variance: $\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \dfrac{(5-1)S_1^2 + (4-1)S_2^2}{5+4-2} = 0.736$

Gränser för $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

där $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $\alpha = 0.05$. $t_{0.025}$ tas ur t-fördelning med $n_1 + n_2 - 2 = 7$ frihetsgrader

Tabell $\Rightarrow t_{0.025} = 2.365$

$\Rightarrow$ konf. int.: $-1.34 \pm 1.36 \Leftrightarrow [-2.70, 0.02]$

(notera att noll och positiva värden också ingår i intervallet, så att det inte finns en statistiskt signifikant skillnad i medelvärde).

6. $V(X+Y) = E[(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2] = E[((X-\mu_X)+(Y-\mu_Y))^2]$

$= E[(X-\mu_X)^2] + E[(Y-\mu_Y)^2] + 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$

$= V(X) + V(Y) + 2C(X,Y)$

VÄND

7. (a) $P(X=0) = \sum_{y=0} p_{XY}(0,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \underline{\frac{3}{8}}$

(b) $P(X+Y=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) =$

$= p_{XY}(0,1) + p_{XY}(1,0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \underline{\frac{1}{4}}$

(c) $P(X=0 \mid Y=1) = \cancel{p_{XY}(0,1) = \frac{1}{8}}$ $\boxed{\cancel{1/8}}$ $\frac{1}{5}$

8. $X \sim Uni([a,b])$; $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ på $[a,b]$

a) $E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \dots \frac{a+b}{2}$

b) $E[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \dots = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

c) $Var(X) (= V(X)) = E[X^2] - E[X]^2 = \dots$

$\dots = \frac{(a-b)^2}{12}$

9 a) Man utnyttjar större stickprov, vilket ger en lägre varians för skattaren.

b) $E[\bar{X}] = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n} E[X_1 + \dots + X_n] =$

$= \cancel{\frac{1}{n}} \cancel{n} E[X_i] = E[X_i] = \mu$

Så $\bar{X}$ är väntevärdesriktig.