

FACIT: Tentamen L9MA30, LGMA30

Matematik 3 för lärare, åk 7-9, Sannolikhetslära och statistik,
Matematik 3 för gymnasielärare, Sannolikhetslära och statistik

2017-01-04 kl. 8.30-12.30

Examinator och Jour: Henrike Häbel, tel. 073 0671252 alt. 031 772 8296

Hjälpmedel: Valfri miniräknare (tomt minne och ingen möjlighet att koppla upp sig till nätet; kontrolleras av examinatorn), (dubbelsidigt) A4 ark med egna anteckningar samt med skrivningen utdelade tabellsidor och formelsamling.

Maxpoäng: 30. För godkänd krävs minst 15 p, för Väl Godkänd 24 p. Eventuell bonuspoäng från 2016 adderas. Lösningar skall redovisas till varje uppgift. Uppgifterna är ej ordnade efter svårighetsgrad. Rättningsprotokoll anslås senast tre veckor efter tentamen.

1. Visa att för två oberoende händelser A och B i något utfallsrum Ω med $A \subseteq B$ gäller att antingen $P(A) = 0$ eller $P(B) = 1$.

2p

Lösningsförslag:

För två oberoende händelser gäller att

$$P(A \cap B) \stackrel{A \subseteq B}{=} P(A) = P(A)P(B). \quad (1p) \quad (1)$$

Likheten (1) stämmer om $P(B) = 1$ eller $P(A) = 0$, eftersom då blir (1) $P(A) = P(A)$ respektive $0 = 0$ (1p).

2. I långväga digitala dataöverföringar (t.ex. från en satellit) är risken för överföringsfel relativt hög. Vi ska studera överföringen av en bit, som är antingen en nolla eller en etta. Antag i en specifik application att felrisken är 2.5% och att man sänder ungefär 40% nollor och 60% ettor. Givet att en etta tagits emot, hur stor är sannolikheten att det var en etta som sändes?

3p

Lösningsförslag:

A_1 := 'nolla sändes', A_2 := 'etta sändes', B := 'etta tagits emot'.

$$P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.6, P(B|A_1) = 0.4 \cdot 0.025 = 0.01, P(B|A_2) = 0.6 \cdot (1 - 0.025) = 0.585 \quad (1.5p)$$

$$\begin{aligned}
 P(A_2|B) &\stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} \quad (1\text{p}) \\
 &= \frac{0.585}{0.01 + 0.585} = \frac{117}{119} \approx 0.983 \quad (0.5\text{p})
 \end{aligned}$$

3. Ett osymmetriskt mynt kastas tre gånger. Resultaten av kasten erhålls oberoende. Antag att sannolikheten för krona är 0.3 och beräkna sannolikhetsfunktionen av den stokastiska variabeln $X = \text{“antal erhållna kronor”}$.

2p

Lösningförslag:

$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{3}{0} 0.3^0 (1-0.3)^3 & , k=0 \\ \binom{3}{1} 0.3^1 (1-0.3)^2 & , k=1 \\ \binom{3}{2} 0.3^2 (1-0.3)^1 & , k=2 \\ \binom{3}{3} 0.3^3 (1-0.3)^0 & , k=3 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases} = \begin{cases} 0.343 & , k=0 \quad (0.5\text{p}) \\ 0.441 & , k=1 \quad (0.5\text{p}) \\ 0.189 & , k=2 \quad (0.5\text{p}) \\ 0.027 & , k=3 \quad (0.5\text{p}) \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

4. Ett tärningsspel i ett kasino går till så att en spelare satsar pengar och väljer en siffra mellan 1 och 6. En croupier kastar tre tärningar. Om en, två eller tre av tärningarna visar den valda siffran så får spelaren två, tre respektive fyra gånger insatsen av banken. Om ingen av tärningarna visar det valda numret förlorar spelaren. Antag att spelaren satsar 50 kr och beräkna den förväntade vinsten.

3p

Lösningsförslag:

Låt X vara antal av det valda numret. Då är

$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{3}{0} \frac{1}{6}^0 (1 - \frac{1}{6})^3 & , k = 0 \\ \binom{3}{1} \frac{1}{6}^1 (1 - \frac{1}{6})^2 & , k = 1 \\ \binom{3}{2} \frac{1}{6}^2 (1 - \frac{1}{6})^1 & , k = 2 \\ \binom{3}{3} \frac{1}{6}^3 (1 - \frac{1}{6})^0 & , k = 3 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases} = \begin{cases} \frac{125}{216} & , k = 0 \quad (0.5\text{p}) \\ \frac{75}{216} & , k = 1 \quad (0.5\text{p}) \\ \frac{15}{216} & , k = 2 \quad (0.5\text{p}) \\ \frac{1}{216} & , k = 3 \quad (0.5\text{p}) \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

Låt Y vara vinsten. Då är $p_Y(k) = p_X(k)$, men för $k = -50, 50, 100, 150$ och man får

$$E(Y) = -50 \cdot \frac{125}{216} + 50 \cdot \frac{75}{216} + 100 \cdot \frac{15}{216} + 150 \cdot \frac{1}{216} = -3.935 \quad (1\text{p}).$$

5. Antag att X är en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} c(2 - x^2) & , -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

där $c \in \mathbb{R}$ är en konstant.

a) Bestäm konstanten c .

1p

b) Låt $Y = 2X - 1$ och beräkna väntevärdet $E(Y)$ och variansen $V(Y)$.

2p

c) Beräkna fördelningsfunktionen $F_X(x)$ och sannolikheten $P(X > 0.5)$.

2p

Lösningsförslag:

a)

$$\int_{-1}^1 c(2 - x^2) dx = c \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = c \frac{10}{3} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \frac{3}{10} \quad (1\text{p})$$

b)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{10} (2x - x^3) dx = \frac{3}{10} \left[2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{10} \cdot 0 = 0$$

och därmed blir $E(Y) = E(2X - 1) = 2E(X) - 1 = -1$ (1p).

$$\begin{aligned} V(X) &\stackrel{reg.}{=} \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{3}{10} (2x^2 - x^4) dx = \frac{3}{10} \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{10} \cdot \frac{14}{15} = \frac{7}{25} = 0.28 \end{aligned}$$

och därmed blir $V(Y) = V(2X - 1) = 4V(X) = 4 \cdot \frac{7}{25} = 1.12$ (1p).

c) För $-1 \leq x \leq 1$ gäller

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-1}^x \frac{3}{10} (2t - t^2) dt = \frac{3}{10} \left[2t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^x \\ &= \frac{3}{10} \left(2x - \frac{x^3}{3} + 2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{10} (6x - x^3 + 6 - 1) = \frac{1}{10} (6x - x^3 + 5) \quad (1p) \end{aligned}$$

och därmed får man

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{1}{10}(6x - x^3 + 5) & , -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases} \quad (0.5p)$$

så att

$$P(X > 0.5) = 1 - F_X(0.5) = 1 - \frac{1}{10}(3 - 0.5^3 + 5) = 0.2125 \quad (0.5p)$$

6. Betrakta följande simultana sannolikhetsfunktion för X och Y med värden i $\{1, 2, 4\}$ respektive $\{-1, 0, 2\}$.

(X, Y)	-1	0	2
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{8}$
4	b	$\frac{1}{4}$	0

- a) Bestäm konstanterna $a, b \in \mathbb{R}$. Du kan använda att $P(X = 2) = \frac{1}{4}$.

1p

- b) Är X och Y oberoende?

1p

- c) Är händelserna $X = 1$ och $Y = -1$ oberoende?

1p

- d) Beräkna $E(XY)$ och $V(XY)$.

2p

Lösningsförslag:

a)

$$a = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \quad (0.5p)$$

och

$$b = 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad (0.5p)$$

b) Nej, eftersom

$$P(X = 4, Y = 2) = 0 \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{24} = P(X = 4)P(Y = 2) \quad (1p)$$

c) Ja, händelserna $X = 1$ och $Y = -1$ är oberoende eftersom

$$P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = P(X = 1)P(Y = -1) \quad (1p)$$

d)

$$\mathbb{E}(XY) = -1 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{12} - 4 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \quad (1p)$$

Eftersom X och Y är ej oberoende, gäller INTE $E(XY) = E(X)E(Y)$! Därför måste man också beräkna $V(XY)$ med $E[(XY)^2] - [E(XY)]^2$.

$$\mathbb{E}[(XY)^2] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{2}{12} + 16 \cdot \frac{2}{8} = \frac{115}{24} \quad (0.5p)$$

och därmed

$$V(XY) = \frac{115}{24} - \frac{1}{64} = \frac{917}{192} \approx 4.776 \quad (0.5p)$$

7. Antag att vikten av metallskivor kan approximeras med en $(\mu, 4.5)$ -normalfördelad variabel (i gram). Hur många observationer måste man göra för att konfidensintervallet för μ med konfidensgraden 95% skall högst ha längden 2?

3p

Lösningsförslag:

Vi får ett exakt $100(1 - \alpha)\%$ konfidensintervall med $\alpha = 0.05$ för μ med

$$I_\mu = \left[\bar{x} \pm \lambda_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{x} \pm 1.96 \frac{4.5}{\sqrt{n}} \right] \quad (1p)$$

med längden

$$2 \cdot 1.96 \frac{4.5}{\sqrt{n}} \stackrel{!}{\leq} 2 \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow n \geq 8.82^2 \approx 78 \quad (1p).$$

8. Följande mätvärden för intelligenskvot (IK) kommer från två grupper av personer A och B.

A	86	101	93	98	89	101	100	104	95	99
B	101	97	96	99	103	113	106	97		

Härvid anses de uppmätta värdena vara två oberoende stickprov från en $N(\mu_A, \sigma)$ - respektive $N(\mu_B, \sigma)$ -fördelning med $\sigma = 6$.

- a) Beräkna ett 99% konfidensintervall för skillnaden. Ger detta intervall någon grund för att påstå att de IK-väntevärdena skiljer sig mellan grupperna?

3p

- b) Är det rimligt att anta samma varians i de båda grupperna?

1p

Lösningsförslag:

- a) Vi har

$$n_A = 10, n_B = 8, \quad \bar{X}_A = 96.6, \bar{x}_B = 101.5, \quad \lambda_{0.005} = 2.5758 \quad (0.5p)$$

100(1 - α)% konfidensintervall med $\alpha = 0.01$:

$$\begin{aligned} I_{\mu_A - \mu_B} &= \left[\bar{x}_A - \bar{x}_B \pm \lambda_{0.005} \sigma \sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)} \right] \quad (1p) \\ &= \left[96.6 - 101.5 \pm 2.5758 \cdot 6 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8} \right)} \right] \\ &= [-12.231, 2.432] \quad (0.5p) \end{aligned}$$

Det vill säga att konfidensintervallet innehåller värdet 0, så det ger ingen grund för påståendet att de IK-väntevärdena skiljer sig mellan grupperna. (1p)

- b) Om grupperna har valts helt slumpmässigt, så är det rimligt att anta samma varians i de båda grupperna. Men om det finns vissa skillnader mellan grupperna (ålder, utbildning, etc.), då kan spridningen variera. (1p)

9. Antag att man har ett stickprov $(x_1, \dots, x_n)$ av storlek n , d.v.s. x_i är observationer av oberoende och likafördelade stokastiska variabler X_i med väntevärde μ och varians σ^2 . När man skattar variansen σ^2 finns det flera möjliga alternativ, till exempel

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{och} \quad s_{\star}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

- a) Visa att $s_{\star}^2$ är ej väntevärdesriktig.

2p

- b) Ibland använder man plus/minus två gånger standardavvikelsen för att ange ett approximativt mått för spridningen. Varför gör man så?

1p

Lösningsförslag:

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s^2) &\stackrel{reg.}{=} \mathbb{E} \left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i^2) - n\bar{X}^2 \right) \right) \\
&\stackrel{reg.}{=} \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}(X_i^2)}_{=V(X_i)+(\mathbb{E}(X_i))^2} - n \underbrace{\mathbb{E}(\bar{X}^2)}_{=V(\bar{X})+(\mathbb{E}(\bar{X}))^2} \right) \\
&\stackrel{def.}{=} \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (V(X_i) + (\mathbb{E}(X_i))^2) - n(V(\bar{X}) + (\mathbb{E}(\bar{X}))^2) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2) \\
&= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 - \sigma^2) \\
&= \frac{n-1}{n-1} \sigma^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

men

$$\mathbb{E}(s_{\star}^2) = \mathbb{E} \left(\frac{n-1}{n} s^2 \right) = \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2 \quad (2p)$$

- b) Två kommer från $\lambda_{0.025} = 1.96$, som motsvarar en 95% konfidensnivå för normalfördelade data. Även om data inte är normalfördelade är två gånger standardavvikelsen ett bra tumregel för (hälften av) konfidensintervall längden.

Lycka till!