

FACIT: Tentamen L9MA30, LGMA30

Matematik 3 för lärare, åk 7-9, Sannolikhetslära och statistik,
Matematik 3 för gymnasielärare, Sannolikhetslära och statistik

2014-10-24 kl. 8.30-12.30

Examinator och Jour: Henrike Häbel, tel. 073 0671252 alt. 031 772 5380

Hjälpmedel: Valfri miniräknare, (dubbelsidigt) A4 ark med egna anteckningar samt med skrivningen utdelade tabellsidor och formelsamling.

Maxpoäng: 30. För godkänd krävs minst 15 p, för Väl Godkänd 24 p. Eventuell bonuspoäng från 2014 adderas. Lösningar skall redovisas till varje uppgift. Uppgifterna är ej ordnade efter svårighetsgrad. Rättningsprotokoll anslås senast tre veckor efter tentamen.

1. Visa att sannolikheten för exakt en av två händelser A och B i något utfallsrum Ω inträffar är

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Ledning: Du kan använda att $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

2p

Lösningsförslag:

$$\begin{aligned} P(\{\text{exakt en}\}) &= P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \quad (0.5p) \\ &\stackrel{\text{disj.}}{=} P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \quad (0.5p) \\ &\stackrel{\text{led.}}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) \quad (0.5p) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad (0.5p) \end{aligned}$$

2. Ett tyskt kortspel som kallas Skat består av 32 kort varav 4 är ess. Korten blandas och läggs på bordet ett efter ett. Vad är sannolikheten att det nionde avtäckta kortet är det andra esset som ligger på bordet?

3p

Lösningsförslag:

Använda den hypergeometrisk fördelningen för de första åtta korten, där antal ess är $Hyp(32, 8, 4/32)$ -fördelat, d.v.s. för $A = \{\text{det nionde avtäckta kortet är det andra esset som ligger på bordet}\}$ är

$$P(A) = \frac{\underbrace{\binom{4}{1} \binom{32-4}{8-1}}_{\substack{\text{1 ess inom 8 kort} \quad (2p)}}}{\binom{32}{8}} \cdot \underbrace{\frac{4-1}{32-8}}_{\substack{\text{9:e kort = ess} \quad (0.5p)}} = \underbrace{0.056}_{(0.5p)}$$

3. En läkare skall diagnosticera en viss sjukdom S , som förekommer med sannolikheten 0.01. Han använder därvid en metod, som ger korrekt resultat med sannolikheten 0.8 om den undersökta personen har sjukdomen S och korrekt resultat med sannolikheten 0.95 om personen inte har sjukdomen S . Om läkaren har förklarat att en person har sjukdomen S , vad är sannolikheten att personen i fråga verkligen har den?

3p

Lösningsförslag:

$A_1 :=$ 'personen har sjukdomen S ', $A_2 :=$ 'personen inte har sjukdomen S ', $B :=$ 'läkaren har förklarat att en person har sjukdomen S '.

$$P(A_1) = 0.01, \quad P(A_2) = 1 - 0.01 = 0.99, \quad P(B|A_1) = 0.8, \quad P(B|A_2) = 1 - 0.95 = 0.05 \quad (0.5p)$$

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &\stackrel{\text{betingad}}{=} \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} \quad (2p) \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.8}{0.01 \cdot 0.8 + 0.99 \cdot 0.05} = \frac{16}{115} \approx 0.139 \quad (0.5p) \end{aligned}$$

4. Hur många russin per bulle skall man beräkna (i genomsnitt) i en deg för att en bulle med minst sannolikheten 0.95 innehålla minst ett russin?

Ledning: Antag att antal russin per bulle är Poisson-fördelat $Po(\lambda)$.

2p

Lösningsförslag:

Låt X = antal russin per bulle, så får man

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \stackrel{!}{\geq} 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \stackrel{!}{\leq} 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \stackrel{!}{\leq} 0.05 \quad (1.5p)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \lambda \geq -\log(0.05) \approx 3, \text{ så att man behöver minst 3 russin per bulle i degen.} \quad (0.5p)$$

5. Antag att X är en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

där $c \in \mathbb{R}$ är en konstant.

- a) Bestäm konstanten c .

1p

- b) Beräkna väntevärdet $\mathbb{E}(X)$ och variansen $V(X)$.

3p

- c) Beräkna sannolikheten $P(1/2 < X \leq 3/2)$.

1p

Lösningsförslag:

- a)

$$\int_1^\infty cx^{-4}dx = -\frac{c}{3} \left[x^{-3} \right]_1^\infty = \frac{c}{3} \stackrel{!}{=} 1 \iff c = 3 \quad (1p)$$

- b)

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot 3x^{-4}dx = -\frac{3}{2} \left[x^{-2} \right]_1^\infty = \frac{3}{2} = 1.5 \quad (1p)$$

$$E(X^2) = \int_1^\infty x^2 \cdot 3x^{-4}dx = -3 \left[x^{-1} \right]_1^\infty = 3 \quad (1p)$$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75 \quad (1p)$$

- c)

$$\begin{aligned} P(1/2 < X \leq 3/2) &= F(3/2) - F(1/2) = \int_1^{3/2} 3x^{-4}dx - 0 = - \left[x^{-3} \right]_1^{3/2} \\ &= -\frac{8}{27} + 1 = \frac{19}{27} \approx 0.704 \quad (1p) \end{aligned}$$

6. Betrakta den följande simultana sannolikhetsfunktionen för X och Y båda med värden i $\{-1, 0, 1\}$.

(X, Y)	-1	0	1
-1	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$
0	$\frac{5}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Visa att X^2 och Y^2 är oberoende, men att däremot X och Y inte är det.

3p

Lösningförslag:

X och Y är inte oberoende eftersom t.ex.

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{32} \neq \frac{5}{32} \frac{7}{32} = P(X = 1)P(Y = 1). \quad (1p)$$

Vi beräknar simultana sannolikhetsfunktionen för X^2 och Y^2 via t.ex.

$$P(X^2 = 1, Y^2 = 0) = P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{5}{32} + \frac{3}{32} = \frac{1}{4}$$

och får

$$\begin{array}{c|cc} (X^2, Y^2) & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \quad (1p)$$

X^2 och Y^2 är oberoende eftersom

$$P(X^2 = 0, Y^2 = 0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(X^2 = 0)P(Y^2 = 0).$$

och samma ekvationer för $P(X^2 = 1, Y^2 = 0)$, $P(X^2 = 0, Y^2 = 1)$ och $P(X^2 = 1, Y^2 = 1)$. (1p)

7. Betrakta följande del av artikeln 'Göteborgarna säger nej till trängselskatt' publicerad på www.gp.se den 2014-09-15.

'När alla 297 valdistrikt räknats står det klart att 56,8 procent säger nej och 43,2 procent ja till trängselskatt.'

Konstruera ett 99 % konfidensintervall för andelen röstberättigade i tusental ($k = 1000$) som sa ja till trängselskatt i Göteborg. Ger detta intervall någon grund för påståendet att inte ens hälften av Göteborgs röstberättigade vill ha trängselskatt? Antag att det fanns $n = 306k$ röster och att valdel- tagandet var 72% (källa: Göteborgs Stad).

Ledning: Vad är totala antalet röstberättigade N ?

4p

Lösningförslag:

Vi har $n = 306k$ och $\hat{p} = 0.432$ för andelen röstberättigade i tusental ($k = 1000$) som sa ja till trängselskatt i Göteborg. Antal röstberättigade som sa ja antas $Hyp(N, n, p)$ -fördelat, där p är den sanna proportionen i hela ändlig populationen av röstberättigade

$$N = 306k \frac{100}{72} = 425k. \quad (1p)$$

Eftersom $n\hat{p}(1 - \hat{p}) \frac{N-n}{N-1} \approx 21024 > 10$ om man räknar med k ($\approx 21 > 10$ om man räknar utan k) använder vi normalapproximationen och får approximativt 100(1 - α)% konfidensintervall med $\alpha = 0.01$ för p (0.5p):

$$I_p = \left[\hat{p} \pm \lambda_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n} \frac{N - n}{N - 1}} \right] \quad (1p)$$

och eftersom $\lambda_{0.005} = 2.5758$

$$I_p = [0.431, 0.433]. \quad (0.5p)$$

om man räkna med k ($I_p = [0.393, 0.471]$ om man räkna utan k) Så konfidensintervallet inte innehåller värde 0.5 (innehåller värden mindre än siffran 0.5), så det ger grund för påståendet att inte ens hälften av Göteborgs medborgare vill ha trängselskatt. (1p)

8. Ett oberoende forskningsinstitut undersöker den faktiska effekten hos två odlingsmetoder för en viss blomma. För den nya metoden mäts höjden på 5 blommor med resultat

10.3, 10.6, 9.6, 10.5, 11.0.

Med den gamla metoden fås resultatet

9.1, 9.9, 9.3, 10.1.

Antag att dessa oberoende mätningar utgör två oberoende stickprov, från en $N(\mu_1, \sigma)$ – och resp. en $N(\mu_2, \sigma)$ –fördelning för vardera odlingsmetoden.

Bestäm ett 99% konfidensintervall för skillnaden i genomsnittlig höjd, alltså $\mu_1 - \mu_2$. Finns det någon grund att påstå att de två odlingsmetoderna ger olika genomsnittliga höjd?

4p

Lösningsförslag:

$\bar{x}_n = 10.4$, $\bar{x}_g = 9.6$, $s_n^2 = 0.265$, $s_g^2 = 0.2267$ (1p)

$$s_p^2 = \frac{(5-1)s_n^2 + (4-1)s_g^2}{5+4-2} = 0.2486 \Rightarrow s_p = 0.499 \quad (0.5p)$$

100(1 - α)% konfidensintervall med $\alpha = 0.01$:

$$I_{\mu_n - \mu_g} = \left[\bar{x}_n - \bar{x}_g \pm t(5+4-2)_{0.005} s_p \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)} \right] \quad (1p)$$

och eftersom $t(7)_{0.005} = 3.499$

$$I_{\mu_n - \mu_g} = [-0.371, 1.971]. \quad (0.5p)$$

Det finns ingen grund att påstå att de två odlingsmetoderna ger olika genomsnittliga höjd, eftersom $0 \in I_{\mu_n - \mu_g}$. (1p)

9. Antag att man har ett stickprov $(x_1, \dots, x_n)$ av storlek n , d.v.s. x_i är observationer av oberoende och likafördelade stokastiska variabler X_i med väntevärde μ och varians σ^2 .

a) När man skattar variansen σ^2 finns det flera möjliga alternativ, till exempel

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{och} \quad s_\star^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Beskriv skillnaden av s^2 och $s_\star^2$. Ledning: Tänk på hur man kan jämföra olika skattare.

1p

- b) Antag att vi har två stickprov av storlek n_X respektive n_Y , med stickprovsvarians s_X^2 respektive s_Y^2 . Om man antar att de två stickproven kommer från fördelningar med samma varians σ^2 , så skattar man σ^2 med så kallad pooled variance

$$s_p^2 = \frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}.$$

Visa att s_p^2 är väntevärdesriktig.

2p

- c) Vad är anledningen till att man väljer pooled variance skattning under b) istället för till exempel s_X^2 eller s_Y^2 ? Beskriv med egna ord, formler behövs inte.

1p

Lösningförslag:

- a) $s_\star^2$ är ingen väntevärdesriktig skattning, men s^2 är det. (0.5p) Däremot är $s_\star^2$ effektivare än s^2 . (0.5p)

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s_p^2) &= \frac{1}{n_X + n_Y - 2} \left((n_X - 1)\mathbb{E}(s_X^2) + (n_Y - 1)\mathbb{E}(s_Y^2) \right) \quad (1p) \\ &= \frac{1}{n_X + n_Y - 2} \left((n_X - 1)\sigma^2 + (n_Y - 1)\sigma^2 \right) \quad (0.5p) \\ &= \frac{n_X + n_Y - 2}{n_X + n_Y - 2} \sigma^2 = \sigma^2 \quad (0.5p) \end{aligned}$$

- c) Man väljer pooled variance skattning under b) för att få en väntevärdesriktig skattare för variansen och samtidig använder alla observationer som finns. (1p)

Lycka till!