
Hemdugga L9MA30, LGMA30

Matematik 3 för lärare, åk 7-9, Sannolikhetslära och statistik,
Matematik 3 för gymnasielärare, Sannolikhetslära och statistik

Sista inlämningsdag 2017-09-18 kl. 12.00

Examinator: Claes Andersson, mejl andclae@chalmers.se, tel. 031 772 8294

Instruktioner: Redovisa fullständiga lösningar. Studenterna får diskutera hur uppgifterna ska lösas, men inlämningarna ska vara individuella. Ger maximalt 2 bonus poäng till tentamen:

Dugga poäng	0-1	2 - 4	5 - 7	8 - 10	10-12
Bonus poäng	0	0.5	1	1.5	2

1. Antag att A och B är två oberoende händelser i något utfallsrum Ω , sådana att $P(A) = P(B)$, och $A \cup B = \Omega$. Vad är $P(A)$?

2p

Lösning: Vi har att A, B oberoende, alltså $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (0.5p). Dessutom har vi $A \cup B = \Omega$, alltså $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ (0.5p). Vi använder formeln för sannolikheten av unionen:

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \underbrace{=}_{\substack{\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B) \\ \text{och oberoende}}} = 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}(A)^2 - 2\mathbb{P}(A) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(P(A) - 1) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 1$$

1p

2. Claes åker spårvagn till jobbet varje morgon. För att hinna i tid behöver han ta en spårvagn som enligt tidtabell ska gå 07.40. Trots att Claes är på hållplatsen exakt 07.40 varje dag, är det inte alltid detta lyckas. Snarare verkar det vara så att spårvagnen avgår en helt slumpmässig (dvs likformigt fördelad) tid mellan 07.38 och 07.44.

- a) Vad är sannolikheten att Claes kommer med vagnen en viss dag?

0.5p

- b) Vad är sannolikheten att Claes kommer med vagnen minst 3 dagar en viss vecka?

1.5p

Lösning:

- a) Låt X = "vagnens verkliga avgångstid". Då måste $X \sim U([07.38, 07.40])$, alltså vara *kontinuerligt* likformigt fördelad på intervallet $[07.38, 07.40]$. Vi har då täthetsfunktionen för X som

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in [07.38, 07.44] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Sannlikheten att Claes hinner med vagnen är $\mathbb{P}(X \geq 07.40) = \int_{07.40}^{07.44} 1/6 dx = 2/3$ (0.5p)

- b) Antag att Claes jobbar 5 dagar per vecka. Låt $Y_1, \dots, Y_5$ vara 1 om Claes hinner med vagnen dag i och 0 annars, där $i = 1, \dots, 5$. Då är varje Y_i Bernoulli-fördelad med $p = 2/3$. Om vidare låter $Y = \sum_{i=1}^5 Y_i$, så är Y = "antalet dagar Claes hinner med vagnen under en vecka", och $Y \sim \text{Bin}(5, 2/3)$, och alltså

$$p_Y(k) = \binom{5}{k} (2/3)^k (1/3)^{5-k}$$

(0.5 p). Vi söker

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(Y < 3) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2) = \\ &= 1 - (\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2)) = \\ &= 1 - (0.004 + 0.0411 + 0.1646) = 0.79 \end{aligned}$$

(1p)

3. Låt X vara en diskret slumpvariabel med $p_X(k) = C(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, N$, där C är en konstant.

- a) Bestäm C (uttryckt i N).

1p

- b) Antag att $N = 5$. Beräkna $\mathbb{E}[X]$, $V(X)$ samt $\mathbb{E}[1/X]$.

3p

Lösning

- a) För att $p_X(k)$ ska vara en sannolikhetsfunktion måste den uppfylla $p_X(k) \geq 0$, $k = 1, \dots, N$ och $\sum_k p_X(k) = 1$. Uppenbarligen kan vi inte ha $N = 1$. För övriga N gäller

$$1 = \sum_{k=1}^N C(k-1) = C \sum_{k=1}^N (k-1) = \underbrace{C}_{l=k-1} \sum_{l=0}^{N-1} 1 = \frac{N(N-1)}{2} \Rightarrow C = \frac{2}{N(N-1)}$$

1p

- b) Med $N = 5$ får vi $C = 1/10$. Det är såklart möjligt att uttrycka väntevärdena och variansen vi söker i N , men med bara 5 termer verkar det enklare att räkna med värden insatta.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{10} \sum_k k(k-1) = \frac{0 + 2 + 6 + 12 + 20}{10} = 4 \quad (1p)$$

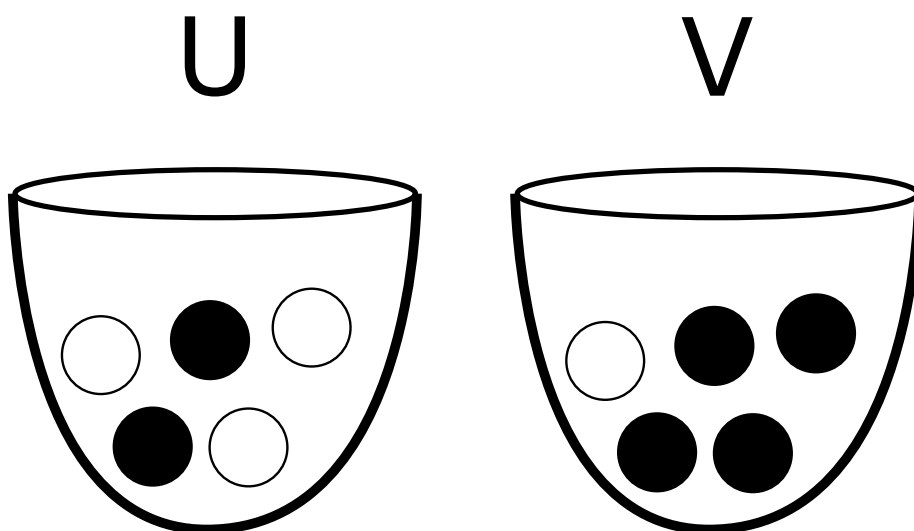
$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{10} \sum_k k^2(k-1) - 4^2 = \frac{0 + 4 + 18 + 48 + 100}{10} - 16 = 1 \quad (1p)$$

$$\mathbb{E}[1/X] = \sum_k 1/k p_X(k) = \frac{1}{10} \sum_k \frac{k-1}{k} = \frac{0 + 1/2 + 2/3 + 3/4 + 4/5}{10} = 163/600 = 0.272 \quad (1p)$$

4. Uno har två urnor, U och V . I U finns 2 svarta och 3 vita kulor, i V finns 4 svarta och 1 vit kula. Uno blundar, stoppar en hand i varje urna, och drar sedan 3 kulor ur U och två kulor ur V . Låt X = "antal svarta kulor ur U " och Y = "antal svarta kulor ur V ".
- a) Vad är sannolikheten att Uno drar sammanlagt 3 svarta kulor (dvs från båda urnorna)?
- b) Innan Uno tittar på kulorna blandar han dom, så att han inte längre vet vilka kulor som kom from vilken av Unos urnor. Givet att Uno dragit 3 svarta kulor totalt, vad är sannolikheten att U nu endast innehåller vita kulor?

2p

2p



Figur 1: Unos urnor.

Lösning:

- a) Låt X = antal svarta kulor dragna ur U och Y = antal svarta kulor dragna ur V . Då har vi att

$$X \sim \text{Hyp}(5, 3, 2/5), \text{ samt}$$

$$Y \sim \text{Hyp}(5, 2, 4/5),$$

samt att X och Y är oberoende. Vi söker $\mathbb{P}(X + Y = 3)$. Vi kan få totalt 3 svarta genom att få 2 svarta från U och 1 från V eller 1 från U och 2 från V . Vi kan alltså skriva

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = 3) &= \mathbb{P}((\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 2\})) \stackrel{\text{disjunkta händelser}}{=} \\ &= \mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}) \stackrel{X, Y \text{ oberoende}}{=} \\ &= \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2) \quad (1p) \end{aligned}$$

Eftersom vi vet fördelningarna för X och Y kan vi beräkna de sannolikheter vi behöver:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{10} = 0.6 & \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{1 \cdot 3}{10} = 0.3 \\ \mathbb{P}(Y = 1) &= \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4 \cdot 1}{10} = 0.4 & \mathbb{P}(Y = 2) &= \frac{\binom{4}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{6 \cdot 1}{10} = 0.6\end{aligned}$$

(1p)

Så

$$\mathbb{P}(X + Y = 3) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.6 = 0.48$$

- b) Frågan kan formuleras som "Vad är sannolikheten att vi dragit två svarta kulor från U betingat på att vi dragit tre svarta kulor totalt?". Alltså är det en betingad sannolikhet vi söker, närmare bestämt $\mathbb{P}(X = 2|X + Y = 3)$. Denna ges av

$$\mathbb{P}(X = 2|X + Y = 3) = \frac{\mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{X + Y = 3\})}{\mathbb{P}(X + Y = 3)}. \quad (1p)$$

Nämnaren vet vi redan är 0.48 från a)-uppgiften. Händelsen i täljaren måste vara $\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}$, eftersom $X = 2$ och $X + Y = 3$ innebär $Y = 1$. Så sannolikheten i täljaren är $0.3 \cdot 0.4 = 0.12$. Därför får vi

$$\mathbb{P}(X = 2|X + Y = 3) = \frac{0.12}{0.48} = \frac{1}{4} \quad (1p)$$