

Tentamen L9MA30, LGMA30

Matematik 3 för lärare, åk 7-9, Sannolikhetslära och statistik,
Matematik 3 för gymnasielärare, Sannolikhetslära och statistik

2017-08-21 kl. 14-18

Examinator och Jour: Claes Andersson, tel. 0734 031540 alt. 031 772 8294

Hjälpmedel: Valfri miniräknare (tomt minne och ingen möjlighet att koppla upp sig till nätet; kontrolleras av examinatorn), (dubbelsidigt) A4 ark med egna anteckningar samt med skrivningen utdelade tabellsidor och formelsamling.

Maxpoäng: 30. För godkänd krävs minst 15 p, för Väl Godkänd 24 p. Eventuell bonuspoäng från 2016 adderas. Lösningar skall redovisas till varje uppgift. Uppgifterna är ej ordnade efter svårighetsgrad. Rättningsprotokoll anslås senast tre veckor efter tentamen.

1. Antag att A och B är två händelser i något utfallsrum Ω sådana att $P(A|B) > P(A)$. Visa att $P(A|B^c) < P(A)$.

2p

2. Otto spelar på Lotto. Han väljer en rad som består av sex olika nummer mellan 1 och 30. Sedan dras sex nummer mellan 1 och 30 utan återläggning, och varje nummer i dragningen som finns med i Ottos rad ger ett rätt. Vad är sannolikheten att Otto får sitt fjärde rätt på det femte dragna numret?

3p

3. Ett företag vill komma till rätta med stölder bland personalen. Av denna anledning överväger man att använda en lögndetektor och helt enkelt screena personalen genom att fråga samtliga om de någon gång stulit från arbetsplatsen. Man tror sig veta att 1% av personalen begår stölder. Lögndetektorn man använder ger utslag med 99% sannolikhet om den utfrågade ljugar, men även om den utfrågade talar sanning ger den utslag med 5% sannolikhet. Antag att en person som stulit skulle ljuga vid utfrågningen och en person som inte stulit skulle tala sanning. Om en slumpvis vald person frågas ut och lögndetektorn ger utslag, vad är sannolikheten att den utfrågade ljugar?

3p

4. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

där $c \in \mathbb{R}$ är en konstant.

- a) Bestäm värdet på c .

1p

- b) Beräkna väntevärdet, $\mathbb{E}[X]$, och variansen, $V(X)$.

3p

5. Antag att X är en kontinuerlig stokastisk variabel som är likformigt fördelad på intervallet $(-1, 1)$. Antag vidare att $Y = X^2$.

- a) Beräkna $\mathbb{C}(X, Y)$.

2p

- b) Är X och Y oberoende?

1p

6. Visa att

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^3 + \frac{xy}{2} & , 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

är en simultan täthetsfunktion för en två-dimensionell kontinuerlig stokastisk variabel (X, Y) och beräkna väntevärdet av $X + Y$.

4p

7. Elaine köper frozen yoghurt (froyo) som påstås innehålla 10 g fett per 100 g froyo. Av olika anledningar misstänker Elaine att detta inte stämmer. Mängden fett, X , mäts i 21 prover av 100 g froyo. Värdena kan antas vara normalfördelade, $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, och observationerna kan sammanfattas med följande summor:

$$\sum x_i = 238.1694, \quad \sum x_i^2 = 2939.242$$

- a) Bilda ett 95% konfidensintervall för värdet på μ .

3p

- b) Kan nollhypotesen $\mu = 10$ förkastas? Vilken signifikansnivå har testet?

1p

8. NBA-slutspelet 2017 vanns av Golden State Warriors. Deras kanske största stjärna är Stephen Curry, främst känd för sitt trepoängsskytte. I slutspelet lyckades han med 72 av 172 trepoängsförsök.

a) Beräkna ett 90% konfidensintervall för sannolikheten att Stephen Curry lyckas med ett trepoängsförsök baserat på datan från slutspelet.

3p

b) Hur många trepoängsförsök hade man behövt observera för att få ett 90% konfidensintervall av längd högst 0.06 (som alltså sträcker sig högst 0.03 åt varje håll från punktskattningen)?

2p

9. Antag att vi har två stickprov av storlek n_X respektive n_Y , med stickprovsvarians s_X^2 respektive s_Y^2 . Om man antar att de två stickproven kommer från fördelningar med samma varians σ^2 , så skattar man σ^2 med så kallad pooled variance

$$s_p^2 = \frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}.$$

Visa att s_p^2 är väntevärdesriktig.

2p

Lycka till!