

## Tentamen L9MA30, LGMA30

Matematik 3 för lärare, åk 7-9, Sannolikhetslära och statistik,  
Matematik 3 för gymnasielärare, Sannolikhetslära och statistik

2018-01-04 kl. 08:30-12:30

**Examinator:** Claes Andersson, tel. 0734 031540

**Jour:** Malin Palö Forsström, tel 031 772 5325

**Hjälpmedel:** Valfri miniräknare (tomt minne och ingen möjlighet att koppla upp sig till nätet; kontrolleras av examinatoren), (dubbelsidigt) A4 ark med egna anteckningar samt med skrivningen utdelade tabellsidor och formelsamling.

Maxpoäng: 30. För godkänd krävs minst 15 p, för Väl Godkänd 24 p. Eventuell bonuspoäng från 2017 adderas. Lösningar skall redovisas till varje uppgift. Uppgifterna är ej ordnade efter svårighetsgrad. Rättningsprotokoll anslås senast tre veckor efter tentamen.

1. Låt  $A, B, C$  vara händelser sådana att  $B$  och  $C$  är disjunkta och  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$ . Visa att

$$\mathbb{P}(A|B \cup C) = \frac{\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|C)}{2}$$

**Ledning:**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3p

**Lösning:**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|B \cup C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))}{\mathbb{P}(B \cup C)} \stackrel{B \cap C = \emptyset}{=} \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))}{\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)} \stackrel{\text{disj.}, \mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)}{=} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C)}{2\mathbb{P}(B)} \stackrel{\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)}{=} \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B)}{2\mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|C)}{2} \end{aligned}$$

2. Claes sadlar om och blir guldgrävare i Klondike. Han tecknar ett avtal med en guldsmed att han får 200 dollar för varje guldklump han hittar. Antalet han hittar per dag är Poisson-fördelat med väntevärde 2, och varje dag vaskar han på en ny plats så antalet han hittar på olika dagar kan antas var oberoende. För mat och husrum betalar Claes den nätta summan av 50 dollar per dygn.
- a) Beräkna väntevärde och varians för Claes vinst på en dag. 2p
- b) Claes planerar att jobba i 100 dagar, för att sedan leva gott på pengarna han tjänat in. Han hoppas då att han tjänat minst 40000 dollar. Beräkna sannolikheten att det sker. 2p

**Lösning:**

- a) Låt  $Y$  beteckna Claes vinst en dag och  $X$  antalet guldklimpar han hittar samma dag. Vi kan då skriva  $Y = 200X - 50$ . Från detta får vi att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[200X - 50] = 200\mathbb{E}[X] - 50 = 350 \\ V(Y) &= V(200X - 50) = 200^2 V(X) = 80000\end{aligned}$$

- b) Låt  $W$  beteckna totala vinsten efter 100 dagar och  $Y_i$  vinsten dag  $i$ . Vi kan då skriva  $Z = \sum_{i=1}^{100} Y_i$  och få att väntevärde och varians ges av

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= 100\mathbb{E}[Y_1] = 35000 \\ V(Z) &\stackrel{\text{oberoende}}{=} 100V(Y_1) = 8000000\end{aligned}$$

Eftersom  $W$  är en summa av 100 oberoende slumpvariabler kan vi med gott samvete anta att den är ungefärligt normalfördelad.

$$\mathbb{P}(W > 40000) = \mathbb{P}\left(\frac{W - 35000}{\sqrt{8000000}} > \frac{40000 - 35000}{\sqrt{8000000}}\right) \approx \mathbb{P}(Z > 1.77) = 0.038,$$

där  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

3. Låt  $X$  och  $Y$  vara två stokastiska variabler. Visa följande formel för kovariansen

$$C(X + Y, X - Y) = V(X) - V(Y).$$

2p

**Ledning:** Du kan använda räkneregler för kovariansen. **Lösning:**

$$\begin{aligned}C(X + Y, X - Y) &= C(X, X - Y) + C(Y, X - Y) = \\ &= C(X, X) - C(X, Y) + C(Y, X) - C(Y, Y) \stackrel{C(X, Y) = C(Y, X)}{=} \\ &= C(X, X) - C(Y, Y) \stackrel{C(X, X) = V(X)}{=} V(X) - V(Y)\end{aligned}$$

4. Antag att  $X$  är en kontinuerlig slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} Cx, & 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases},$$

där  $C$  är en konstant.

- a) Bestäm  $C$  så att  $f(x)$  är en giltig täthetsfunktion 1p  
 b) Beräkna väntevärdet,  $\mathbb{E}[X]$ , och variansen,  $V(X)$ . 3p  
 c) Bestäm  $\mathbb{P}(X > 1 | X > \mathbb{E}[X])$ . 1p

**Lösning:**

a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C \int_{1/2}^{3/2} x dx = C \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{1/2}^{3/2} = C \frac{9-1}{8} = C \Rightarrow C = 1$$

b)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{1/2}^{3/2} x \cdot x dx = \left[ x^3/3 \right]_{1/2}^{3/2} = 13/12,$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{1/2}^{3/2} x^2 \cdot x dx = \left[ x^4/4 \right]_{1/2}^{3/2} = 5/4,$$

och

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{5}{4} - \left( \frac{13}{12} \right)^2 = \frac{11}{144}$$

c)  $\mathbb{E}[X] = 13/12$  så  $\mathbb{P}(X > 1 | X > \mathbb{E}[X]) = \mathbb{P}(X > 1 | X > 13/12) = 1$ , eftersom  $13/12 > 1$ .

5. Ett företag tillverkar TV-apparater. En TV-apparat är felaktig med sannolikhet 0.025. Varje TVapparat testas om den är felaktig innan den lämnar företaget. Testet anger ett fel för felaktiga TV-apparater med sannolikhet 0.93. Testet anger också ett fel för ej felaktiga TV-apparater med sannolikhet 0.01. En slumpmässigt utvald TV-apparat testas.

a) Hur stor är sannolikheten att testet anger ett fel på TV-apparaten? 1p

b) Vad är sannolikheten att TV-apparaten är felaktig, om testet anger inget fel på TV-apparaten? 2p**Lösning:** Låt  $F$  = TVn felaktig och  $T$  = testet anger fel.a) Vi söker  $\mathbb{P}(T)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(T \cap (F \cup F^c)) = \mathbb{P}(T \cap F) + \mathbb{P}(T \cap F^c) = \mathbb{P}(T|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(T|F^c)\mathbb{P}(F^c) \\ &= 0.93 \cdot 0.025 + 0.01 \cdot 0.975 = 0.033 \end{aligned}$$

b) Vi söker  $\mathbb{P}(F|T^c)$ .

$$\mathbb{P}(F|T^c) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(T^c|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(T^c)} = \frac{(1 - 0.93) \cdot 0.025}{1 - 0.033} \approx 0.0018,$$

alltså knapp 2 på 1000. Gott så.

6. Betrakta den följande simultana sannolikhetsfunktionen för  $X$  och  $Y$  båda med värden i  $\{-1, 0, 1\}$ .

| $(X, Y)$ | -1             | 0              | 1              |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| -1       | $\frac{3}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{3}{32}$ |
| 0        | $\frac{5}{32}$ | $\frac{8}{32}$ | $\frac{3}{32}$ |
| 1        | $\frac{1}{32}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

Visa att  $X^2$  och  $Y^2$  är oberoende, men att däremot  $X$  och  $Y$  inte är det.

3p

**Lösning:**

$X$  och  $Y$  är inte oberoende eftersom t.ex.

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{32} \neq \frac{5}{32} \frac{7}{32} = P(X = 1)P(Y = 1).$$

Vi beräknar simultana sannolikhetsfunktionen för  $X^2$  och  $Y^2$  via t.ex.

$$P(X^2 = 1, Y^2 = 0) = P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{5}{32} + \frac{3}{32} = \frac{1}{4}$$

och får

| $(X^2, Y^2)$ | 0             | 1             |
|--------------|---------------|---------------|
| 0            | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1            | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

$X^2$  och  $Y^2$  är oberoende eftersom

$$P(X^2 = 0, Y^2 = 0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(X^2 = 0)P(Y^2 = 0).$$

och samma ekvationer för  $P(X^2 = 1, Y^2 = 0)$ ,  $P(X^2 = 0, Y^2 = 1)$  och  $P(X^2 = 1, Y^2 = 1)$ .

7. Sten-Åke livnär sig på att tillverka tegel, och har precis fått en ny tegelstensmaskin till sin fabrik. Båda maskinerna är lika precisa – de tillverkar stenar vars vikt har en standardavvikelse på 0.25 kg. Men Sten-Åke misstänker också att stenarna från den nya maskinen har annan genomsnittsvikt. Han väger därför 35 stenar från den nya maskinen, och 37 som var tillverkade i den gamla. Nedan är en sammanfattning av vikterna. Låt  $x$  beteckna stickprovet av stenar från den gamla maskinen och  $y$  stickprovet från den nya maskinen.

| Gamla                | Nya                  |
|----------------------|----------------------|
| $n_X = 37$           | $n_Y = 35$           |
| $\sum x_i = 119.2$   | $\sum y_i = 104.1$   |
| $\sum x_i^2 = 384.2$ | $\sum y_i^2 = 311.6$ |

Sten-Åke tycker inte resultatet är tydligt nog, utan vill ha hjälp av dig med en statistisk analys.

- Konstruera ett 99% konfidensintervall för skillnaden mellan väntevärdet av vikten på stenarna från gamla maskinen och från nya maskinen 2p
- Kan vi vid signifikansnivå 1% slå fast att genomsnittsvikten skiljer sig mellan maskinerna? 1p
- Sten-Åke förstår inte vad du menar med "signifikansnivå". Hur skulle du kortfattat förklara för Sten-Åke vad det innebär att signifikansnivån är 1%? 1p

**Lösning:**

- Notera att vi vet standardavvikelserna för de två maskinerna, som  $\sigma_X = \sigma_Y = 0.25$ . Konfidensintervallet som ska användas är därför

$$KI = \bar{X} - \bar{Y} \pm \lambda_{0.005} 0.25 \sqrt{1/n_X + 1/n_Y}.$$

Från datan får vi att  $\bar{x} = 119.2/37 = 3.22$  och  $\bar{y} = 104.1/35 = 2.97$  och från tabell får vi att  $\lambda_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.57$ . Konfidensintervallet blir därför

$$KI = [0.098, 0.402]$$

- b) Ja, konfidensintervallet innehåller (inte ens nästan) 0. Den nya maskinen verkar tillverka lättare stenar åt Sten-Åke.
- c) Signifikansnivån är sannolikheten att vi förkastar  $H_0$  om den är sann/risken för typ I-fel.
8. I februari i år gjordes en undersökning kring hur många som har ett favoritlag i herrarnas fotbollssallsvenska och vilket det i så fall är. Det visade sig att intresset för allsvenskan tycks öka, och, föga oväntat, att IFK Göteborg är det populäraste laget. Utav 6000 tillfrågade svarade 610 att IFK Göteborg var deras favoritlag. För tio år sedan var andelen som hade IFK Göteborg som favoritlag 9,5%.
- a) Bilda ett 90% konfidensintervall för andelen som har IFK Göteborg som favoritlag. 2p
- b) Kan vi vid signifikansnivå  $\alpha = 0.1$  säga att andelen har ökat under de senaste 10 åren? 1p

**Lösning:**

- a) Konfidensintervallet ges av

$$KI = \hat{p} \pm \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},$$

där  $\alpha = 0.1$ ,  $\hat{p} = 610/6000 = 0.102$  och  $n = 6000$ . Från tabell får vi att  $\lambda_{0.05} = 1.645$ , vilket ger konfidensintervallet

$$KI = [0.0952, 0.1080]$$

- b) Ja, 0.095 ligger nedanför konfidensintervallet, så vi förkastar gladeligen  $H_0$ .

9. När man skattar andelen med en viss egenskap i en population,  $p$ , tar man ett stickprov ur populationen och använder skattaren  $\hat{p}$  = andelen med egenskapen i stickprovet. (Egenskapen här kan vara att skulle rösta på ett visst parti, att man är rökare, etc.)
- a) Visa att  $\hat{p}$  är en väntevärdesriktig skattare för  $p$ . 2p
- b) Slas-Hans är lat, och tycker att man bara behöver välja en person slumpmässigt och fråga om den har egenskapen eftersom "Väntevärdet av den slumpvariabeln också är  $p$ ". Förklara för Slas-Hans varför detta är en synnerligen dålig idé. 1p

**Lösning:**

- a) Låt  $X_i$  beteckna svaret från person  $i$ , som alltså är 1 om den har egenskapen och 0 annars och sannolikheten att  $X_i = 1$  är  $p$ , den sanna andelen. Då är  $\hat{p} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ .

$$\mathbb{E}[\hat{p}] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]}{n} = \frac{np}{n} = p$$

- b) Slas-Hans har rätt i att den är väntevärdesriktig, men skattaren kommer alltid ta värdet 0 eller 1, vilket är en tämligen usel egenskap. Slas-Hans får ta sig i kragen och fråga några till.

Lycka till!