

Lösningsförslag till tentamen i modellering, 2013-10-31.

Problem 1:

- a) $X' = 0$ ger $rX(1 - X/K) - hX = 0$ eller $X(r(1 - X/K) - h) = 0$. Så, $X = 0$ eller $X = K(1 - h/r)$.
- b) DE kan skrivas $X' = (r - h)X - rX^2/K$. Om $r - h > 0$ växer populationen för tillräckligt litet positivt X . Om $r - h \leq 0$ avtar X . Gränsfallet är $h = r$.
- c) Här ett minimalt Geogebra-program (använd gärna färg också). Den sista raden markerar jämviktsläget ($y = K(1 - h/r)$) går bra i stället för **Funktion**.

```
r = 1
K = 100
h = 0.2
f(x,y) = r y (1 - y / K) - h y
LösODE[f, 0, 20, 20, 0.1]
LösODE[f, 0, 120, 20, 0.1]
Funktion[K (1 - h / r), 0, 20]
```

- d) Den tentand som inte svarade på detta kan läsa sid 54 och 56 i läroboken.
- e) För små populationer är X/K litet så det är gott om föda för fiskarna, populationen växer till snabbt. Eftersom fiskekvoter används, fiskas bara en andel av populationen. Den starka tillväxten kombinerad med det begränsade fisket gör att populationen växer. Om $X < K$, men där X ligger rätt nära K , så finns det fortfarande föda, men i rätt liten mängd, populationen ligger nära sitt maximum, tillväxten är långsam. Fisket är rätt omfattande, hX är ju proportionell med X som är stor. Den kombinerade effekten av att födan nästan är slut och det massiva fisket gör att populationen avtar, den begränsade tillväxthastigheten kan inte kompensera för fisket.

Problem 2: Systemet kan skrivas:

$$\begin{cases} V_1' = v_{in} - k_1 \sqrt{h_1} \\ V_2' = k_1 \sqrt{h_1} - k_2 \sqrt{h_2} \end{cases}$$

Volymen, V , av en kon kan skrivas $V = \pi r^2 h/3$ där r är radien i basytan. Eftersom $r = h \tan(\varphi/2)$, om φ är öppningsvinkeln, gäller $V = \pi \tan^2(\varphi/2) h^3/3$ så $h = [3V/(\pi \tan^2(\varphi/2))]^{1/3}$. Modellen blir alltså:

$$\begin{cases} V_1' = v_{in} - k_1 [3V_1/(\pi \tan^2(\varphi_1/2))]^{1/6} \\ V_2' = k_1 [3V_1/(\pi \tan^2(\varphi_1/2))]^{1/6} - k_2 [3V_2/(\pi \tan^2(\varphi_2/2))]^{1/6} \end{cases}$$

Jämviktslägena ges av $V_1' = V_2' = 0$ så att

$$V_1 = (v_{in}/k_1)^6 (\pi/3) \tan^2(\varphi_1/2), \quad V_2 = (v_{in}/k_2)^6 (\pi/3) \tan^2(\varphi_2/2)$$

Slutligen Geogebra-programmet (tmp är temporära variabler som används för att få kortare kod):

```
tmp_1 = 3 / (pi tan(0.3 / 2)^2)
tmp_2 = 3 / (pi tan(0.35 / 2)^2)
k_1 = 1.2
k_2 = 1.1
vin = 2
f(x, y, z) = vin - k_1 (y tmp_1)^(1/6)
g(x, y, z) = k_1 (y tmp_1)^(1/6) - k_2 (z tmp_2)^(1/6)
NSolveODE[{f, g}, 0, {2.3, 1}, 30]
Funktion[(vin / k_1)^6 / tmp_1, 0, 30]
Funktion[(vin / k_2)^6 / tmp_2, 0, 30]
```