MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamen i ANALYS, fördjupning för gymnasielärare, LLMA60 och MMGL61
12 januari 2015, kl 14.00–18.00

Hjälpmedel: inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefonvakt: Jan Stevens, 5345

För godkänt krävs minst 30 poäng, för väl godkänt minst 45 poäng. Bonuspoäng från hösten 2014 ingår.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. För vilka reella tal gäller det att $|x+6| - |2x-4| = 1$? (7p)

2. Beräkna följande integraler

$$\text{(a)} \quad \int x \sin x^2 \, dx \,, \qquad \text{(b)} \quad \int x^2 \sin x \, dx \,. \qquad \text{(8p)}$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x^3 e^{-x}$. Ange inflexionspunkterna. (8p)

4. Beräkna längden av kurvbågen $y = \dfrac{x^2}{4} - \ln\sqrt{x}, \quad 1 \le x \le 4$. (7p)

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' - y = x^2 \sin x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(\frac{\pi}{2}) = 1$. (8p)

6. Bestäm de lokale maximi- och minimipunkter till funktionen $f(x,y) = x^3y - xy + xy^3$ (om de finns). (7p)

7. Beräkna integralen $\iint_D (3x-y)\cos(x+2y)\, d\,A$, där D är parallellogrammen med hörn i $(-1,-4)$, $(1,2)$, $(3,-6)$ och $(5,0)$. (8p)

8. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{2015} x(x-2015)^{2014}\, dx$. (7p)

Lycka till! Jan Stevens

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^s$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos s$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos s$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+s^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+s)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+s)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är s ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$