

LLMA60 MATEMATIK FÖR LÄRARE, GYMNASIET
Analys, ht 2014

Block 2, översikt

I block 2 ingår följande avsnitt i Stewart:

Kapitel 3, avsnitt 3.1 – 3.6, samt 3.9; kapitel 4, avsnitt 4.1 – 4.3, 4.5, 4.7, 4.8.

Rekommenderade övningsuppgifter:

3.1 9, 23, 33, 75. **3.2** 13, 18, 33, 51. **3.3** 3, 12, 33, 41, 54. **3.4** 9, 28, 39, 45, 65, 92. **3.5** 25, 32, 39, 47. **3.6** 3, 9, 16, 19, 27. **3.9** 5, 13, 21.

REVIEW True-False Quiz 4, 6, 10. **Exercises** 70, 107. **Problems Plus** 8.

4.1 19, 23, 35, 41, 57, 61, 63, 75. **4.2** 7, 17, 23, 29. **4.3** 5, 9, 15, 25, 33, 45, 48, 73, 83. **4.5** 11, 26, 39, 50. **4.7** 7, 27, 35, 41, 48. **4.8** 17, 29.

REVIEW True-False Quiz 1, 8, 16. **Exercises** 15. **Problems Plus** 15, 17.

Block 2 behandlar derivator; hur de beräknas och hur de används.

I avsnitt 3.1 – 3.4 samt 3.6 bestäms derivator av de vanligaste funktionerna; dessutom visas deriveringsregler, för summa, produkt och kvot. Den viktigaste regeln är emellertid kedjeregeln (3.4), delvis för att det är den som lättast glöms bort, men också för att den är avgörande i samband med till exempel implicit derivering och inversens derivata (3.5). Man kan visa att en om en inverterbar funktion är deriverbar kommer även inversen att vara deriverbar, och för inversens derivata värde finns en allmän formel. Låt $g(x)$ vara deriverbar i punkten x , och inverterbar: skriv f för inversen g^{-1} . Vi har alltså $y = g(x)$ och $x = f(y)$. Då gäller $f(g(x)) = x$ och vi kan derivera båda sidor med avseende på x . Med kedjeregeln får vi då att $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$, eller $f'(y) \cdot g'(x) = 1$. Den inversa funktionen $f(y)$ är deriverbar i y och $f'(y) = 1/g'(x)$, om $g'(x) \neq 0$.

Slutet av kapitel 3 och större delen av kapitel 4 kretsar kring derivatans betydelse. Till att börja med finns ett avsnitt om så kallade kopplade förändringar (related rates, 3.9). Det är inget av de viktigaste momenten i kursen, men här finns flera 'textproblem', dvs uppgifter där man själv måste göra den matematiska formuleringen; sådana uppgifter är alltid nyttiga att arbeta med.

De centrala avsnitten är grafitrning och optimering.

Grafitrning kan förefalla en smula föråldrat när det i dag finns så avancerade och lätt-tillgängliga hjälpmedel för att rita grafen till $f(x)$. Icke desto mindre är det viktigt för förståelsen att på egen hand kunna skaffa en överblick av en funktionsgraf och se vilken roll derivatans tecken har, även om det inte längre finns samma anledning att ge sig på de mer komplicerade funktionerna.

Optimering är ett av de klassiska analysproblemen: att hitta det största eller minsta värdet till en funktion, både lokalt och globalt. Grunderna läggs i avsnitt 4.1 och de tillämpade exemplen kommer i 4.7. Även dessa uppgifter ger en god övning i konsten att själv formulera matematiska problem.

En viktig aspekt på optimering av en funktion är att det inte räcker med att hitta ett nollställe till derivatan. Man måste också genomföra ett resonemang som visar att detta

nollställe sammanfaller med funktionens största värde (eller i förekommande fall minsta). Eventuellt kan man ta hjälp av andraderivatan, men det bästa är utan tvekan att göra en grov skiss av funktionen. Ofta räcker det att betrakta exemplets formulering för att se grafens karaktär.

I övrigt finns i detta kapitel Medelvärdessatsen (4.2) som framför allt är ett viktigt teoretiskt hjälpmedel; det är den som fastställer sambandet mellan funktionens karaktär och derivatans tecken.

Newtons metod är en gammal men synnerligen framgångsrik metod att bestämma närmevärden till lösningarna av ekvationen $f(x) = 0$. Exakta lösningar är ju sällan möjligen att finna och därför är denna metod viktig. Även om idén är enkel leder den snabbt till långa räkningar och man sitter helst inte med papper och penna; men det är viktigt att förstå hur den fungerar. Dessutom leder den till en så kallad rekursionsföljd, också det ett viktigt begrepp.

Facit till utvalda uppgifter

3.2.18: $y'(s) = \frac{1+ke^s}{(s+ke^s)^2}$

3.3.12: $\frac{1}{1-\sin x}$

3.3.54: 0

3.4.28: $\frac{4}{(e^u+e^{-u})^2}$

3.5.32: $y = -2$

3.6.16: $\frac{1-3t^2}{1+t+t^3}$

REVIEW True/false: 4 – true, 6,10 – false

Exercises 70: a) -2, b) $\frac{3}{8}$, c) 6.