

LLMA60 MATEMATIK FÖR LÄRARE, GYMNASIET
Analys, ht 2014

Block 3, översikt

I block 3 ingår följande avsnitt i Stewart:

Kapitel 5, kapitel 6 utom avsnitt 4, kapitel 7 avsnitt 1, 2, 4, 5, 7, 8 och kappitel 8, avsnitt 1 och 2.

Rekommenderade övningsuppgifter:

5.1 17, 25. **5.2** 17, 27, 33, 55, 57. **5.3** 3, 7, 15, 23, 35, 41, 61, 73. **5.4** 9, 26, 33, 45, 49, 53. **5.5** 7, 15, 17, 21, 33, 59, 87.
6.1 7, 11, 31. **6.2** 3, 9, 49, 51, 59, 65. **6.3** 5, 17. **6.5** 1, 13, 17.
7.1 3, 27, 33, 68. **7.2** 4, 7, 12, 31, 67. **7.4** 9, 11, 21, 29, 41, 47. **7.7** 1, 30. **7.8** 8, 11, 18, 32, 49, 59, 68, 75, 76.
8.1 9, 31. **8.2** 5, 9, 15, 33.

Block 3 handlar om integraler och deras tillämpningar.

En bestämd integral $\int_a^b f(x) dx$ "är" arean under grafen till funktionen $f(x)$ mellan a och b . Men vad är area? Vi kan beräkna arean för trianglar och rektanglar, men för mera komplicerade figurer (t ex cirkeln) får man arean som ett gränsvärde: man approximerar med polygon. Då kan man likaväl definiera integralen som gränsvärde av approximationer med rektanglar. Det funkar då också om funktionen antar negativa värden.

Definitionen ges i avsnitt 1 och 2. Reglerna 1–8 på S. 379–381 är viktiga; de förefaller helt naturliga om integralen tolkas som area. Allra viktigast i kapitlet är förstås integralkalkylens huvudsats (analysens fundamentalsats) (avsnitt 5.3). Den säger att funktionen

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

är en *primitiv funktion* till $f(x)$, dvs $F'(x) = f(x)$ (se figur 5 på S. 388; beviset använder räkneregler för integraler och inte själva integraldefinition). Detta betyder att derivering och integrering är varandras inverser. Satsen gör det också möjligt att beräkna bestämda integraler: om vi nu råkar känna till en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$, så är

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

I boken är detta satsens andra del. Observera att vi inte kan skriva x som integrationsvariabel i $\int_a^x f(t) dt$, men det går bra i $\int_a^b f(x) dx$.

Alla primitiva funktioner till en och samma funktion $f(x)$ skiljer sig bara om en konstant: om $F'(x) = G'(x) = f(x)$, så är $(F - G)'(x) = 0$ och därmed är $F(x) - G(x) = C$ för någon konstant C . En obestämd integral (avsnitt 5.4) är symbolen

$$\int f(x) dx .$$

Den står för mängden av alla primitiva funktioner till $f(x)$. Tex skriver man

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Man får inte glömma konstanten C .

Om vi läser listan på derivator av elementära funktioner ”baklänges” får vi direkt en lista med obestämda integraler:

$$\begin{aligned}\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C\end{aligned}$$

Den här listan ska man kunna utantill.

Det finns tre viktiga tekniker för att beräkna integraler: substitution (avsnitt 5.5), partiell integration (7.1) och för rationella funktioner partialbråksuppdelning (7.4).

Substitutionsregeln finns för bestämda och obestämda integraler. I obestämmda integraler måste man substituera tillbaka den ursprungliga variabeln. I bestämda integraler ska man räkna om integrationsgränserna, och sätta in dem i den primitiva funktion som innehåller den nya variabeln. Alternativt kan man förberäkna en primitiv funktion (dvs den obestämda integralen) och sen sätta in som vanligt. Oftast är det enklast att räkna om gränserna.

I kapitel 7 handlar avsnitt 2 om hur man använder sinus- och cosinusformler för att beräkna trigonometriska integraler; kom ihåg att $\sec x = 1/\cos x$. I det sista avsnittet (7.8) introduceras oegentliga integraler, där en eller båda integrationsgränser är (plus eller minus) oändligheten, eller där funktionen har en vertikal asymptot.

Tillämpningar beskrivs i kapitel 6 och 8. Först handlar det om att beräkna area för mera komplicerade figurer, som kan uppfattas att ligga mellan två grafer. Avsnitt 6.2 och 6.3 tar upp två viktiga metoder för att beräkna volymer till rotationskroppar. I 8.1 handlar det om kurvlängd, och i 8.2 om arean för rotationsytor.