

LLMA60 MATEMATIK FÖR LÄRARE, LÄRARLYFTET
ANALYS, FÖRDJUPNING

Inlämningsuppgift till Block 4

Lös följande uppgifter och skicka renskrivna lösningar (per postt eller via mail i en bifogad fil till mig (stevens@chalmers.se) senast 10 november.

Tre poäng på varje uppgift, för att få en bonuspoäng krävs sammanlagt 7 poäng. Den som hamnar strax under gränsen får möjlighet att komplettera.

Lycka till.

Jan.

1. För vilka x är

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}x^n}{3^{n-1}}$$

konvergent och vad blir summan för dessa x ?

2. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion med

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att antingen $f(x) = 0$ för alla x eller $f(0) = 1$.

(b) Antag att vi är i fallet $f(0) = 1$. Antag vidare att f är deriverbar i $x = 0$ med $f'(0) = 1$. Visa att f är deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$ och att $f'(x) = f(x)$. Lös differentialekvationen och bestäm $f(x)$.

3. Fibonacciföljden definieras genom $f_1 = f_2 = 1$ och $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ för $n \geq 3$. Låt $\{q_n\}$ vara följderna av kvoter $q_n = f_{n+1}/f_n$.

(a) Härled en rekursionsformel för q_n .

(b) Antag att vi vet att $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ existerar. Vad är då värdet $L = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$?

(c) Visa att följderna $\{q_{2n}\}$ är avtagande, och att följderna $\{q_{2n-1}\}$ är växande: visa (under användning av rekursionsformeln) att $L < q_{2n+2} < q_{2n}$ och $q_{2n-1} < q_{2n+1} < L$. Konkludera att följderna $\{q_n\}$ konvergerar.