

LLMA60 MATEMATIK FÖR LÄRARE, GYMNASIET
Analys, ht 2014

Block 4, översikt

I block 4 ingår följande avsnitt i Stewart:

Kapitel 9, utom avsnitt 9.4;

kapitel 11, utom avsnitt 11.11.

Första delen av block 4 (V43) handlar om differentialekvationer.

Rekommenderade övningsuppgifter för kapitel 9:

9.1 3, 4, 7, 9, 15

9.2 3–6, 19

9.3 1, 3, 10, 12, 21, 39

9.5 7, 9, 11, 19, 31

9.6 1, 5

Första delen av block 4 (V43) handlar om differentialekvationer. En matematisk modell tar ofta formen av en diffekvation. Den beskriver hur storheter ändras i tiden, helst med en enkel formel. Däremot kan själva storheten vara en komplicerad funktion av tiden. Att lösa diffekvationen innebär att hitta denna funktion. I allmänhet är det omöjligt, och man får nöja sig med att approximera lösningen numeriskt, eller grafiskt. För vissa typer av ekvationer finns det exakta lösningsmetoder.

Avsnitt 9.1 introducerar grundläggande begrepp i samband med diffekvationer. I kapitlet förekommer bara diffekvationer av första ordningen (Kap 17 om andra ordningsekvationer ingår inte i kursen); detta betyder att inga högre derivator förekommer. Ekvationen beskriver då y' som funktion av x och y . Avsnitt 9.2 behandlar grafiska och numeriska lösningsmetoder. Första tanken är kanske att sätta ut y' som pil i varje punkt (x, y) i planet; detta blir oöverskådligt, och det är bättre att bara sätta små streck. Så får man en riktningsfält. En lösning är en kurva som har de små streck som tangenter. Eulers metod för att approximera lösningen är att följa tangentvektorn (den här gången tänkt som pil) i stället för att följa kurvan.

Det finns två viktiga klasser av första ordnings diffekvationer, som kan lösas exakt: separabla (avsnitt 9.3), och linjära (avsnitt 9.5). Vissa enkla ekvationer är både linjär och separabel.

Avsnitt 9.6 ger en biologisk tillämpning. Den ingår inte i stoffet för tentan.

Andra delen av block 4 (V44 och 45) handlar om följder och serier.

Rekommenderade övningsuppgifter för kapitel 11:

11.1 6, 7, 25, 27, 33, 34, 47, 64, 79

11.2 15, 23, 25, 28, 29, 41, 49, 79

11.3 7, 23, 29, 43

11.4 5, 6, 7, 13, 31, 40, 41

11.5 7, 11, 17

11.6 7, 11, 13, 21, 25, 35

11.7 5, 11, 15, 21, 31

11.8 15, 17

11.9 5, 9, 13

11.10 3, 5, 15, 27, 33, 35, 55, 57, 58, 74

Avsnittet Sequences and Series i Visual Calculus (se länk på kurshemsidan) passar bra till det här kapitlet. De lösta uppgifter (Drill problems) motsvarar i turordning avsnitt 11.2 till och med 11.7 i boken.

En (tal)serie är en summa av oändligt många tal. Ordningen i vilken talen står, spelar en roll. En precis matematisk definition av summan använder gränsvärden, nämligen gränsvärdet av följderna av partialsummor. Därför börjar kapitlet med ett avsnitt om följder. En följd är en funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ och definitionen av $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ är densamma som den av $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ för en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Traditionellt används lite annorlunda notation och terminologi för följder och serier, till exempel skrivs a_n för $a(n)$. Begreppen konvergens och divergens introduceras i avsnitt 11.1.

I avsnitt 11.2 kommer de första serier. För en *geometrisk serie* kan man beräkna summa — detta är en viktig formel. Den *harmoniska serien* är divergent.

I allmänhet går det inte att beräkna summan, men man får nöja sig med att bestämma om serien konvergerar eller inte. Det finns en rad olika kriterier (som sammanfattas i 11.7). Det första är integralkriteriet (11.3), där man jämför en serie med en oegentlig integral (med samma formel som integrand). Integralen ger en bra uppskattning av summan (men inte det exakta värdet). En viktigt resultat att känna till (som senare får användas utan kommentar) är att p -serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ är konvergent om $p > 1$ och divergent om $p \leq 1$. Nästa kriteriet är jämförelsekriteriet (11.4), som funkar för serier med positiva termer; man jämför med kända serier, till exempel p -serien. Lättast att använda är kriteriet i gränsvärdesform: om $\sum a_n$ och $\sum b_n$ är serier med positiva termer och $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ med $0 < c < \infty$, så är antingen båda serier konvergenta eller båda divergerar. Om $c = 0$ eller $c = \infty$, har man bara halva slutsats. Given en serie $\sum a_n$ försöker man hitta en känd serie så att gränsvärdet c ligger mellan 0 och ∞ .

För serier med avväxlande positiva och negativa termer finns Leibniz kriterium (11.5). Till exempel den alternerande harmoniska serien konvergerar, medan den harmoniska serien själv divergerar. Detta är en exempel på en serie som är *betingat konvergent*, men inte *absolut konvergent*. Kriterier för absolut konvergens (eller kriterier igen för serier med positiva termer) är kvotkriteriet (även kallad d'Alemberts kriterium) och rotkriteriet (Cauchy's kriterium). Det första är det viktigaste, som oftast används (men naturligtvis finns det uppgifter där rotkriteriet är bättre).

Avsnitt 11.8–10 handlar om serier, där termerna själv är funktioner. Genom att sätta in värden blir det talföljder; konvergens beror nu på x -värdet. En *potensserie* är konvergent på ett intervall $|x - a| < R$, och divergent för $|x - a| > R$. Talet R kallas för *konvergensradie*, eftersom begreppet introducerades för komplexa potensserier, som konvergerar på en cirkelskiva i komplexa planet. Man kan utveckla en funktion i en potensserie (11.10). Detta kallas för *Taylorserie* och ett specialfall heter *Maclaurinserie*. Det är viktigt att känna till Taylorserierna för några vanliga funktioner (Table 1 på S. 762). De kan användas vid gränsvärdesberäkningar.

Ledning

11.1.79: skriv rotuttryck om som 2 upphöjd till

Svar

9.1.4: a) $5/2$,

9.2.4: I , 6: II

9.3.10: $z = -\log(e^t + C)$, 12: $y^2 = (\log x)^2 + 4$

11.1.6: 1,0,-1,0,1, 34: divergent, 64: a) div b) konvergent

11.2.28: $5/8$

11.4.6: konv