

## LLMA60 MATEMATIK FÖR LÄRARE, GYMNASIET Analys, ht 2014

### Block 5, översikt

I block 5 ingår följande avsnitt i Stewart:

Kapitel 12, utom avsnitt 12.4 och 12.6;

kapitel 14.

Första delen av block 5 (V46) handlar om vektorer.

Rekommenderade övningsuppgifter för kapitel 12:

**12.1** 3, 5, 9, 39

**12.2** 6, 8, 15, 17, 43

**12.3** 1, 3, 7, 9, 21, 45, 63

Uppgifterna 1 till 5 nedan

**12.5** 3, 5, 9, 19, 23, 27, 45, 61

**Review, problems plus 4**

Första delen av block 5 (V46) handlar om rymdgeometri och vektorer. Vi tar bara upp vad som är viktigt för flervariabelanalys.

Avsnitt 12.1 introducerar tredimensionella koordinatsystem.

Nästa avsnittet handlar om vektorer. Liksom många matematiska begrepp kommer vektorbegreppet från fysiken. Ordet vektor introducerades 1846 av den engelska matematikern W. R. Hamilton (i samband med kvaternionen), men redan långt innan representerades och sammansatts krafter som vektorer. Senare kom vektorer också att användas för att beskriva andra fysikaliska storheter som har storlek och riktning, t ex elektrisk fältstyrka.

Vi ritar en vektor som har fotpunkt  $A$  och ändpunkt  $B$  som en pil med spets i punkten  $B$  och betecknar den med  $\overrightarrow{AB}$ . Det är ibland bekvämt att rita vektorer med godtycklig fotpunkt, men efter att vi har valt ett koordinatsystem, räknas det bara med vektorer med fotpunkt i origo  $O$ . Vi skriver då  $\overrightarrow{OA}$ , eller  $\mathbf{a}$  (eller  $\bar{a}$ , eller  $\vec{a}$ , eller  $\dots$ , eftersom fett stil är svårt i handskrift).

Låt nu  $A = (a, b)$  vara en punkt i planet. Den bestämmer entydigt en vektor, nämligen  $\overrightarrow{OA}$ , som kallas för *ortsvektor* för  $A$ . För att skilja mellan punkten  $A = (a, b)$  och vektorn  $\overrightarrow{OA}$  använder boken beteckningen  $\langle a, b \rangle$  för vektorn. Det är vanligare med  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Enhetsvektorerna på koordinataxlarna betecknas med i boken  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  och  $\mathbf{k}$ , annars också med  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  och  $\mathbf{e}_3$ . I  $\mathbb{R}^2$  (om vi har två koordinater) har vi  $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  och i  $\mathbb{R}^3$  (tre koordinater) har vi  $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och slutligen  $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle = \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

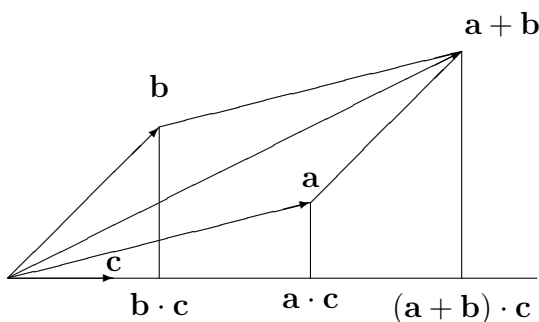
Vi har nu en geometrisk och en algebraisk beskrivning av vektorer. Addition och skalärmultiplikation kan definieras på två sätt: geometriskt och algebraiskt. Figur 14 (S. 794) visar att det ger samma resultat (för addition).

I boken ges två geometriska beskrivningar för addition. Eftersom alla vektorer har samma fotpunkt (nämligen origo) är den andra metoden (med parallelogram, figur 4) att föredra.

Om vi betraktar bara vektorer av typ  $\overrightarrow{OA}$  med fotpunkt  $O$ , så kan vi definiera  $\overrightarrow{AB}$  som  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ . Detta är den vektor med fotpunkt i origo som har samma längd och riktning som den riktade sträckan  $AB$ .

Vektorer kan adderas och subtraheras. Det finns sätt att multiplicera vektorer, men multiplikationen följer inte de vanliga reglerna. Speciellt kan man inte dela vektorer på varandra. Det finns två produkter, *skalärprodukt* och *vektorprodukt*. Det första betecknas med  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , det andra med  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (därför också kallats för kryssprodukt). Skalärproduktet behandlas i 12.3. Kryssproduktet (12.4) gäller bara för vektorer i  $\mathbb{R}^3$ , och inte för vektorer i planet, och det behövs inte för kapitel 14.

Igen finns det en geometrisk och en algebraisk definition för skalärproduktet. Beviset i boken för sammanfallandet (sats 3) använder cosinussatsen, som är kanske inte så känd. Ett enkelt bevis för cosinussatsen får man faktiskt genom att använda skalärproduktet på en triangel med vektorer  $\mathbf{a}$  och  $\mathbf{b}$  som två sidor (en bra övning!). Ett annat sätt att inse likheten är genom att använda räkneregler. Med den algebraiska definitionen är det uppenbart att  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ , men inte geometriskt: det är oklart vad sambandet är mellan vinkeln mellan  $\mathbf{c}$  och  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  och vinklarna mellan  $\mathbf{c}$  och  $\mathbf{a}$ , och mellan  $\mathbf{c}$  och  $\mathbf{b}$ . Men det behövs inte: läs formeln  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$  som  $|\mathbf{a}|(|\mathbf{b}| \cos \theta)$ , där  $|\mathbf{b}| \cos \theta$  är (plus eller minus) längden av vektor  $\mathbf{b}$ 's projektion på linjen genom  $\mathbf{a}$  (med  $+$ -tecknet om projektionen har samma riktning som  $\mathbf{a}$ ). Följande figur illustrerar regeln  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  i fallet där  $\mathbf{c}$  är en enhetsvektor (med regeln  $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , som boken inte nämner, kan vi alltid reducera till det här fallet); vi projicerar på linjen genom  $\mathbf{c}$ .



Det återstår bara att inse att  $\langle x, y \rangle \cdot \mathbf{i} = x$  (eller  $\langle x, y, z \rangle \cdot \mathbf{i} = x$  och motsvarande för de övriga standard basvektorer) enligt den geometriska definitionen, och detta följer ur cosinusdefinitionen.

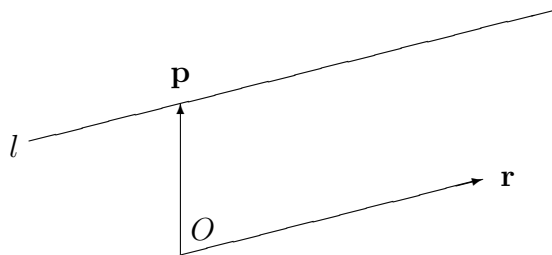
Riktningvinklar och riktningscosinus (S. 803) är inte viktigt.

Avsnitt 12.5 handlar bara om linjer och plan i rummet. Det är lite lättare att först titta på linjer i planet.

**Ekvationen för en linje.** Alla vektorer som är multipla av varandra, ligger på en och samma linje genom origo. Därför kan vi beskriva en linje genom origo i parameterform som

$$\mathbf{x} = t\mathbf{r}, \quad t \in \mathbb{R},$$

där  $\mathbf{r}$  är en nollskild vektor på linjen.



Varje linje  $l$  i planet har en entydig parallell genom origo. En nollskild vektor  $\mathbf{r}$  på parallellen kallas för **riktningsvektor** till  $l$ . Om  $P$  är en godtycklig punkt på linjen med Ortsvektor  $\mathbf{p}$ , så får vi linjens ekvation på parameterform som

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{r}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Exempel.** Bestäm linjen genom punkterna  $P_1 = (2, -1)$  och  $P_2 = (4, 1)$ .

*Lösning.* En riktningsvektor är  $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 4, 1 \rangle - \langle 2, -1 \rangle = \langle 2, 2 \rangle$ . En vektor i samma riktning är  $\langle 1, 1 \rangle$ . Linjen ges av

$$\langle x, y \rangle = \langle 4, 1 \rangle + t\langle 1, 1 \rangle.$$

Vi kan också skriva

$$\begin{aligned} x &= 4 + t \\ y &= 1 + t \end{aligned}$$

En annan beskrivning av en linje  $l$  i planet är en linjär ekvation i  $x$  och  $y$ . Den kan fås genom att lösa ut parametern  $t$ , men också på följande sätt. Låt  $\mathbf{n}$  vara en **normalvektor** till linjen, d v s  $\mathbf{n}$  ligger på en linje vinkelrät mot  $l$  och mot riktningsvektorn  $\mathbf{r}$  för  $l$ . Då är  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$  och för alla  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{r}$  med spets på  $l$  gäller  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$ . Detta är den sökta ekvationen, oberoende av  $t$ , och den har faktiskt formen  $ax + by = c$ .

*Exemplets fortsättning.* En riktningsvektor är  $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 2, 2 \rangle$ . En normalvektor  $\langle n_1, n_2 \rangle$  uppfyller  $2n_1 + 2n_2 = 0$ . Vi väljer  $\langle n_1, n_2 \rangle = \langle 1, -1 \rangle$ . Ekvationen blir  $x - y = c$ , där  $c$  bestäms genom att sätta in  $P_1$ 's koordinater:  $x - y = 2 - (-1) = 3$ . Vi kollar resultatet genom att sätta in punkten  $P_2$  i ekvationen  $x - y = 3$ .

Med tre koordinater beskrivs en linje i parameterform på samma sätt, med en parameter, medan det behövs två ekvationer för en linje; för ett plan är det tvärtom, en ekvation eller i parameterform med två riktningsvektorer. För ett plans ekvation behövs (liksom för en linje i planet) en normalvektor. Givet två riktningsvektorer beräknas en normalvektor med kryssproduktet, men eftersom vi hoppar över detta, förekommer det inte i de rekommenderade övningarna.

## Uppgifter

1. Avgör vilka av punkterna  $(7, 0)$ ,  $(6, 1)$ ,  $(12, -11)$  och  $(0, 5)$  ligger på linjen

$$\begin{cases} x = 7 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}.$$

2. Linjen  $l$  har ekvation i parameterform  $x = 2 + t$ ,  $y = 5 - t$ . Avgör vilken av följande ekvationerna som är en annan parameterframställning av samma linje.

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15 - 17t \\ y = -8 + 17t \end{cases}$$

3. Rita linjerna  $x - 2y = -1$ ,  $x - 2y = 0$ ,  $x - 2y = 2$  och  $x - 2y = 5$  i samma figur.
4. Bestäm den linje genom punkten  $(2, 7)$ , som är parallell med linjen  $3x - y = 5$ . Bestäm linjen genom samma punkt  $(2, 7)$  som är vinkelrät mot linjen  $3x - y = 5$ .
5. Beskriv i parameterform och parameterfri linjen genom
- a)  $(2, 1)$  och  $(3, 3)$ ,      b)  $(5, 1)$  och  $(0, 2)$ ,      c)  $(-3, -1)$  och  $(3, 1)$ .

Andra delen av block 5 (V47 och 48) handlar om flervariabelfunktioner.

Rekommenderade övningsuppgifter för kapitel 14:

**14.1** 17, 32, 59–64, 69

**14.2** 9, 13, 17, 20

**14.3** 15, 17, 19, 21, 29, 33

**14.4** 1, 5, 11

**14.5** 3, 7, 9, 25, 43, 47

**14.6** 5, 7, 11, 29, 49

**14.7** 1, 3, 7, 13, 19, 31, 43, 53

**14.8** 1, 3, 19, 27, 28, 33, 41

**Review, true–false quiz** 1, 3, 7

Avsnitt 14.1 ger olika sätt att visualisera funktioner i flera variabler. Sista stycket handlar om vektornotation för funktioner. I stället för  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  kan man skriva  $z = f(\mathbf{x})$ . Med vektornotation blir också gränsvärdesdefinitionen i 14.2 enklare; definition 5 på S. 899 ser likadant ut som envariabelsdefinition 2 på S. 110. Det nya fenomenet i fler variabler är att man kan komma till olika gränsvärden, beroende på hur man närmar sig t ex origo. Ett exempel är exempel 3, fig 6, på S. 895. Symbolet V för exemplet betyder att det finns en Visual; om du tittar på weblinks på bokens hemsida: högst uppe för kap 14 finns Visuals and Modules, som länkar till

[http://www.brookscole.com/math\\_d/templates/student\\_resources/visuals\\_modules\\_et5e/ch14.html](http://www.brookscole.com/math_d/templates/student_resources/visuals_modules_et5e/ch14.html)

Tyvärr behövs det ett extra (men gratis nedladdbart) program för att titta på animationen. De flesta länkar under weblinks funkar inte längre.

Tangentplanet (14.4) är den bästa linjära approximationen till en yta. Riktningskoefficienterna ges av de partiella derivatorna (14.3). Det kan vara att partiella derivatorna existerar i en punkt, utan att tangentplanet existerar, men inte om de partiella derivatorna är kontinuerliga funktioner (sats 2 i 14.4). Funktionen kallas differentierbar om tangentplanet existerar. Högre partiella derivator (S. 906) är viktiga för extremvärden (14.7). Partiella derivator förekommer i partiella differentialekvationer (PDE), boken ger några exempel, men detta ingår inte i kursen.

Kedjeregeln i 14.5 är viktig.

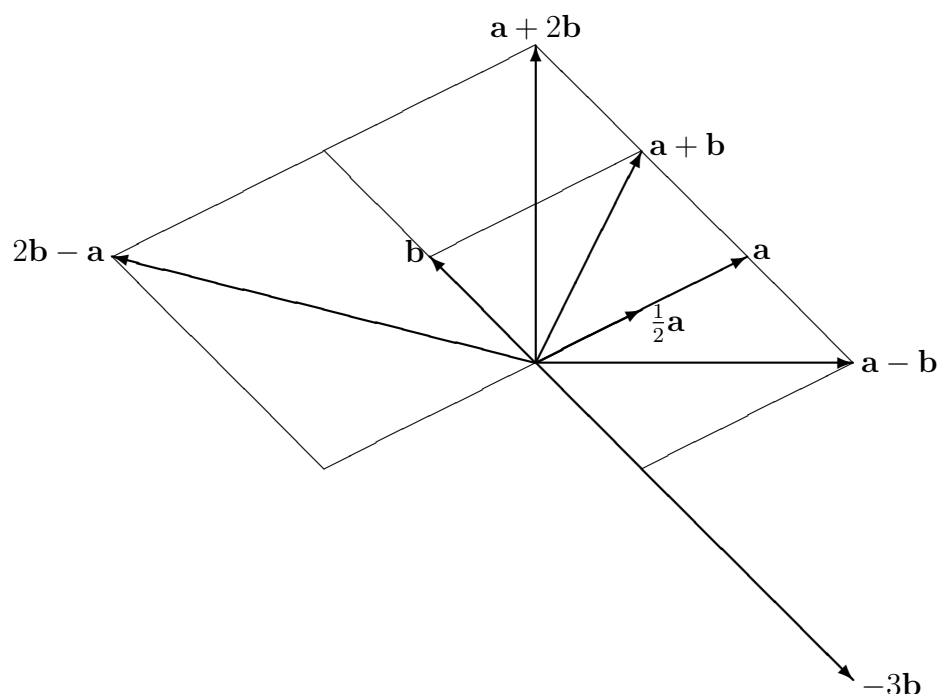
Gradienten (14.6) är vinkelrät mot nivå-ytan för en funktion  $f(\mathbf{x})$  och är därmed normalvektor till tangentplanet. Beteckning  $\nabla f$ , uttalad som *nabla f*. Gradienten ger riktningen, i vilken funktionen växer snabbast. Avsnittet introducerar också riktningsderivator. En riktning ges av en vinkel (mot  $x$ -axeln), så av en vektor med spets på enhetscirkeln. Därför definieras riktningsderivator endast för enhetsvektorer, men själva definitionen funkar

lika bra för vektorer med godtyckligt längd. Att göra en vektor till enhetsvektor innebär oftast dela med ett rotuttryck, t ex enhetsvektorn i samma riktning som vektorn  $\langle 1, 2 \rangle$  är  $\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, 2 \rangle$ . Sådana uttryck vill vi gärna undvika.

De sista två avsnitt handlar om att hitta maxima och minima. Liksom i envariabelfallet är en nödvändigt villkor att derivatan är noll (d v s gradienten). Vilken typ av punkt det blir, undersöks närmare med andraderivator. Nya fenomenet här är sadelpunkter. I bland kan man undvika att beräkna andraderivator genom att en punkt är t ex redan ett globalt maximum. För en funktion definerad på en hyperyta finns det två sätt att hitta extrema. Det ena är att man löser ut en variabel, och sen räknar man med funktionen av två variabler, som man får ut. Det kan bli krångliga beräkningar. Gradienten av  $f$ 's restriktion till en hyperyta  $\{g = 0\}$  är noll, om  $\nabla f$  ligger på samma linje som ytans normalvektor, d v s  $\nabla g$ . Sådana punkter hittar man med s k Lagrange multiplikatorer.

**Svar**

12.2.6:



12.2.8:  $\sqrt{2}$

14.1.32: I  $\leftrightarrow$  c, II  $\leftrightarrow$  e, III  $\leftrightarrow$  f, IV  $\leftrightarrow$  d, V  $\leftrightarrow$  b, VI  $\leftrightarrow$  a

59: II  $\leftrightarrow$  C, 60: IV  $\leftrightarrow$  A, 61: I  $\leftrightarrow$  F, 62: III  $\leftrightarrow$  E, 63: VI  $\leftrightarrow$  B, 64: V  $\leftrightarrow$  D

14.2.20: gränsvärdet existerar inte

/JS