LLMA60 MATEMATIK FÖR LÄRARE, GYMNASIET
Analys, ht 2014

Block 6, översikt

I block 6 ingår följande avsnitt i Stewart:
Kapitel 15, utom avsnitt 15.5

Rekommenderade uppgifter:

15.1 *6, 13*
15.2 *1, 3, 7 ,9, 13, 15, 17, 19, 38*
15.3 *1, 5, 7, 9, 15, 16, 21, 27 43, 51*
15.10 *1, 7, 15*
15.4 *7, 10, 11, 15, 29, 40*
15.6 *1, 3, 10*
15.7 *1, 3, 9, 13, 15, 27*
15.8 *9, 17, 29*
15.9 *21*
Problems plus *5, (6)*

Block 6 handlar om dubbel- och trippelintegraler.

Liksom en integral $\int_a^b f(x)d\,x$ beräknar arean under grafen till funktionen $f(x)$ (om $f(x) \geq 0$ för alla $a < x < b$), beräknar en dubbelintegral $\iint_D f(x,y)d\,A$ volymen under grafen över området D. En trippelintegral beräknar 4-dimensionell volym under grafen över ett området i 3-dimensionella rummet, men det är svårt att föreställa sig.

Definitionen (15.1) liknar envariabelfallet, där rektanglar byts ut mot rätblock. Också de numeriska metoder för integralberäkning kan generaliseras på liknande sätt. Men viktigare är metoden för analytisk beräkning (15.2). Det är skivmetoden. Om D är en rektangel med vänster nedre hörn i (a,c) och höger övre hörn i (b,d), så kan integralen beräknas genom att först integrera i x-ledet, där y anses vara konstant, och sen integrera över y:

$$\iint_D f(x,y)d\,A = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)d\,x\right] d\,y\ .$$

Fubini's sats säger att man kan göra så om $f(x,y)$ är kontinuerlig. Då är det förstås också möjligt att först integrera m a p y:

$$\iint_D f(x,y)d\,A = \int_c^d \int_a^b f(x,y)d\,x\ d\,y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)d\,y\ d\,x\ .$$

Oftast gör det inte stor skillnad, men det ena kan också vara betydligt lättare än det andra.

15.3: Om integrationsområdet är mera komplicerat än en rektangel, är det en bra idé att rita upp området. Integrationsgränserna för första integrationen, m a p x, beror nu på y. Vid byte till först integrera över y, måste gränserna räknas om.

15.10: variabelbyte. Också i dubbelintegraler kan vi göra en substitution. Vi måste kompensera för areaförändringen av små rektanglar i (x,y)-planet med Jacobianen (def 7). Ett viktigt specialfall görs redan i 15.4, för byte till polära koordinater.

De fysikaliska tillämpningar i 15.5 ingär inte. Tillämpningen som ingår är areaberäkning för grafytor (15.6); formeln är en direkt generalisering av formeln för längden av en kurva $y = f(x)$.

15.7-9. I princip finns det inga svårigheter att ha en variabel mer, och beräkna trippelintegraler — bara att uträkningarna blir längre. För problem med vissa symmetrier kan det vara bra att använda cylindriska koordinater (polära koordinater i (x, y)-planet, tillsammans med z-koordinaten) eller sfäriska koordinater.

Svar
15.1.6: Svaret beror lite grann på valda metoden, men är ungeför 200.000 liter.
15.2.38: $4\pi^2$
15.3.16: $\frac{1}{2}(e^{16} - 1)$
15.4.10: $\frac{1}{2}\pi(b^2 - a^2)$
15.6.10: 4π
Problems plus 5 och 6: Det är rätt sä svärt att beräkna integralen; det intressanta är att det är möjligt, och att därmed beräkna summan $\sum 1/n^2$. Det är lättare att använda substitutionen $x = u - v$, $y = u + v$ än den given i uppgiften, för att slippa faktorn $\sqrt{2}$ i beräkningen.

/JS