

LMA100

Tentamensskrivning i Aritmetik och algebra, del B

1. Lös ekvationen $(3 - i)z^2 - 20z + 43 + 19i = 0$.
2. Låt z_1 och z_2 vara punkterna på enhetscirkeln med argument $\pi/6$ respektive $\pi/4$. Beräkna argumentet θ för produkten $z_1 \cdot z_2$. Skriv z_1 , z_2 och $z_1 \cdot z_2$ på formen $a + ib$ och ange $\cos \theta$ och $\sin \theta$.
3. Visa att polynomet $p(X) = X^{2002} + X^{1345} - X^{845} - X^6 + X^4 - 1$ är delbart med $X^4 - 1$, t.ex. genom att dela upp $X^4 - 1$ i 1:gradsfaktorer och visa att $p(X)$ är delbart med var och en av dem.
4. På heltalen definierar vi relationen $n_1 \sim n_2$ genom
 - (a) $n_1 + n_2$ udda
 - (b) $n_1 + n_2$ jämnt
 - (c) $n_1 \cdot n_2$ udda
 - (d) $n_1 \cdot n_2$ jämnt

Bestäm för var och en av dessa relationer om den är reflexiv, symmetrisk eller transitiv; om någon är en ekvivalensrelation, ange ekvivalensklasserna.

5.
 - (a) Ge exempel på en ring R som har $\mathbb{Z}$ som äkta delmängd och som inte är en kropp.
 - (b) Ge exempel på en kropp K som har $\mathbb{Q}$ som äkta delmängd och som inte är hela $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

Motivera att R uppfyller de tre räknesätten och att K uppfyller de fyra räknesätten.

6.
 - (a) Visa att $\mathbb{Z}$ kan delas upp i två disjunkta delmängder som båda är uppräknliga.
 - (b) Visa att $\mathbb{Z}$ för varje heltal $n > 2$ kan delas upp i n disjunkta delmängder som alla är uppräknliga.
 - (c) Visa att $\mathbb{Z}$ kan delas upp i uppräknligt många disjunkta delmängder som alla är uppräknliga.

Varje uppgift ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs 12 poäng (inkl bonus), för väl godkänt 18 poäng (exkl bonus).

Tentan beräknas vara färdigrättad måndagen den 17 juni kl 12.30, varefter resultat kan fås på tel. 772 3593.