

1. (a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera följande utsaga: Om p är ett primtal så är $2p + 1$ eller $4p + 1$ också ett primtal. Är denna utsaga sann eller falsk? Motivera Ditt påstående.

(b) Formulera negationen till utsagan i (a) (så att negationssymbolen “ $\neg$ ” inte förekommer i svaret). Vilken logisk sanning (tautologi) använder Du?

(Du kan beteckna mängden av primtal med t ex $\mathbb{P}$).

(a) Utsagan kan formuleras på följande sätt: $\forall p \in \mathbb{P} : 2p + 1 \in \mathbb{P} \vee 4p + 1 \in \mathbb{P}$. Denna utsaga är falsk. Man får ett motexempel då $p = 17$: $2 \cdot 17 + 1 = 35$ är inte ett primtal och $4 \cdot 17 + 1 = 69$ är inte ett primtal.

(b) Negationen av utsagan i (a) lyder: $\neg(\forall p \in \mathbb{P} : 2p + 1 \in \mathbb{P} \vee 4p + 1 \in \mathbb{P}) \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{P} : 2p + 1 \notin \mathbb{P} \wedge 4p + 1 \notin \mathbb{P}$. Vi använder här de Morgans lag: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ då A och B är utsagor.

2. Låt $A = \{x \in \mathbb{N} | 10 < x^2 < 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 10 \text{ och } x \text{ är ett primtal}\}$ och $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestäm $(A \setminus B) \setminus C$ och $A \setminus (B \cup C)$. Är dessa mängder lika? Gäller Ditt påstående för helt godtyckliga mängder A, B, C ? Rita motsvarande Venn-diagram och ge ett bevis som utnyttjar definitionerna av mängdoperationerna.

Vi har $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ och C som ovan. Alltså är $(A \setminus B) \setminus C = \{4, 6, 8, 9\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 8, 9\}$, och $A \setminus (B \cup C) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} = \{6, 8, 9\}$. Mängderna är lika i detta fall. Genom att rita Venn-diagram (utelämnas här av tekniska skäl), konstaterar vi att likheten gäller för tre godtyckliga mängder i allmän position. Vi bevisar likheten: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ för godtyckliga A, B, C . Låt $VL = (A \setminus B) \setminus C$ och $HL = A \setminus (B \cup C)$. Vi har:

$$x \in VL \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in HL$$

Alltså är $VL = HL$.

3. (a) Bestäm alla heltaliga lösningar till ekvationen $20x + 50y = 430$ och utnyttja resultatet för att hitta alla möjliga sätt att med 20-kronorssedlar och 50-kronorssedlar betala 430 kronor.

(b) Ge ett matematiskt argument som visar att 435 inte kan betalas med samma valörer som i (a).

(a) Vi delar bägge leden i ekvationen med 10, vilket ger en ekvivalent ekvation $2x + 5y = 43$. En partikulär lösning till denna är t ex $x_0 = 4, y_0 = 7$ så att vi har $2x + 5y = 2x_0 + 5y_0$, vilket ger $2(x - x_0) = 5(y_0 - y)$. Eftersom 5 dividerar vänster led och 5 och 2 är relativt prima, får man att 5 dividerar $x - x_0$ så att $x - x_0 = 5k$ för ett heltal k . Alltså är $x = x_0 + 5k$. Ekvationen $2(x - x_0) = 5(y_0 - y)$ ger nu $2 \cdot 5k = 5(y_0 - y)$ så att $y = y_0 - 2k$. Den allmänna lösningen till ekvationen är således $x = 4 + 5k, y = 7 - 2k$, där k är ett godtyckligt heltal.

För att hitta alla möjligheter att betala 430 kronor med 20- och 50-kronorssedlar söker vi alla (x, y) sådana att $x \geq 0$ och $y \geq 0$. Dessa olikheter ger $4 + 5k \geq 0$ dvs $x \geq -\frac{4}{5}$ och $7 - 2k \geq 0$ dvs $y \leq \frac{7}{2}$. Alltså är $k = 0, 1, 2, 3$, vilket ger $(x, y) = (4, 7), (9, 5), (14, 3), (19, 1)$.

(b) Likheten $20x + 50y = 435$ med hela x, y implicerar att $10 \mid 435$, vilket är falskt.

(b) Motivera att för godtyckliga heltal a, b är talet $ab(a^4 - b^4)$ delbart med 5.

(a) Se stencilen om restaritmetiker.

(b) Om $5 \mid a$ eller $5 \mid b$ så är det klart att $5 \mid ab(a^4 - b^4)$. Om $5 \nmid a$ och $5 \nmid b$ så gäller enligt Fermats lilla sats att $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$ och $b^4 \equiv 1 \pmod{5}$. Alltså är $a^4 - b^4 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{5}$ dvs $5 \mid a^4 - b^4$. Detta visar att för alla heltal a, b är $5 \mid ab(a^4 - b^4)$.

5. (a) Bevisa med matematisk induktion att för varje $n = 1, 2, 3, \dots$ är talet $T_n = 9^{2n} - 1$ delbart med 5.

(b) Bevisa samma påstående med hjälp av restaritmetiken modulo 5.

(a) Vi kontrollerar att $T_1 = 9^2 - 1 = 80$ är delbart med 5. Nu antar vi att påståendet gäller för ett $k \geq 1$ dvs att 5 dividerar talet $T_k = 9^{2k} - 1$ och vi vill visa att påståendet gäller för nästa tal $n = k + 1$ dvs 5 dividerar $T_{k+1} = 9^{2(k+1)} - 1$. Vi har:

$$T_{k+1} = 9^{2(k+1)} - 1 = 9^{2k+2} - 1 = 81 \cdot 9^{2k} - 1 = 80 \cdot 9^{2k} + 9^{2k} - 1.$$

Denna likhet visar att talet T_{k+1} är summan av två termer $80 \cdot 9^{2k}$ och T_k som båda är delbara med 5. Alltså är talet T_{k+1} delbart med 5. Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \dots$ dvs alla T_n är delbara med 5.

(b) Vi vill visa att talet T_n ger resten 0 vid division med 5. Vi har $9 \equiv -1$ modulo 5 dvs $[9]_5 = [-1]_5$. Alltså är

$$[T_n]_5 = [9^{2n} - 1]_5 = [(-1)^{2n}]_5 - [1]_5 = [1]_5 - [1]_5 = 0.$$

Detta visar att talet T_n lämnar resten 0 vid division med 5 dvs $5 \mid T_n$ för varje $n = 1, 2, 3, \dots$

6. Ge exempel på ett motsägelsebevis ("reductio ad absurdum") – formulera en sats (välj själv!) och ge dess bevis.

Se kurslitteraturen! (Du kan t ex bevisa att $\sqrt{3}$ inte är rationellt eller att det finns oändligt många primtal.)

7. Låt a, b vara positiva reella tal. Bevisa olikheten:

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

När gäller likhet?

Vi har

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

Den sista olikheten är sann så att även vår ursprungliga olikhet gäller för godtyckliga $a, b > 0$. Likhet får man då och endast då $(a - b)^2 = 0$ dvs $a = b$.