

1. Avgör om följande utsaga är sann eller falsk:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy > 0 \Rightarrow x > 0 \vee y > 0.$$

Formulera negationen till denna utsaga så att negationssymbolen “ $\neg$ ” inte förekommer i svaret. Vilken logisk sanning (tautologi) använder Du?

Utsagan är falsk. Om vi till exempel väljer $x = -1$ och $y = -1$ så får vi $xy > 0$ trots att både x och y inte är positiva (bägge är negativa). Negationen lyder

$$\neg(\forall x, y \in \mathbb{R} : xy > 0 \Rightarrow x > 0 \vee y > 0) \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : xy > 0 \wedge x \leq 0 \wedge y \leq 0.$$

Vi använder här de Morgans lag: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ och tautologin $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ då A och B är utsagor. Observera att $\neg(x > 0) \Leftrightarrow (x \leq 0)$.

2. Låt A, B, C beteckna tre godtyckliga mängder. Är det sant att att $A \cup C = B \cup C$ implicerar $A = B$? Implicerar likheten $A \setminus C = B \setminus C$ att $A = B$? Exemplifiera Dina svar! Besvara samma frågor då man antar att $A \cap C = B \cap C = \emptyset$.

Är det sant att att $A \cup C = B \cup C$ implicerar $A = B$? Svar: nej. Välj $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$. Då är $A \cup C = B \cup C = \{1, 2\}$, men $A \neq B$.

Är det sant att att $A \setminus C = B \setminus C$ implicerar $A = B$? Svar: nej. Välj som ovan $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$. Då är $A \setminus C = B \setminus C = \emptyset$, men $A \neq B$.

Nu besvarar vi samma två frågor då vi antar att $A \cap C = B \cap C = \emptyset$. Svaret är ja. Om nu $A \cup C = B \cup C$ och $x \in A$ så $x \in B \cup C$. Eftersom $x \notin C$ så måste $x \in B$. På samma sätt $x \in B$ ger $x \in A$ så att $A = B$. Exakt samma argument ger att $A \setminus C = B \setminus C$ och $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ implicerar $A = B$.

3. (a) Med hjälp av Euklides algoritm beräkna $\text{SGD}(a, b)$ då $a = 325$ och $b = 91$. Beräkna också $\text{MGM}(a, b)$.

(b) För vilka heltaliga värden på d kan man hitta lösningar till ekvationen $325x + 91y = d$, där a, b är givna i (a)? Ge exempel på två olika d och på en lösning (x, y) i vart och ett av fallen.

(a) Enligt Euklides algoritm får man: $325 = 91 \cdot 3 + 52$, $91 = 52 \cdot 1 + 39$, $52 = 39 \cdot 1 + 13$, $39 = 13 \cdot 3$. Alltså är $\text{SGD}(325, 91) = 13$. Enligt formeln

$$\text{MGM}(a, b) = \frac{ab}{\text{SGD}(a, b)}$$

får vi $\text{MGM}(325, 91) = \frac{325 \cdot 91}{13} = 2275$.

(b) Om ekvationen $325x + 91y = d$ har en lösning (x, y) så gäller $13(25x + 7y) = d$ så att $13 \mid d$. Detta är ett nödvändigt och tillräckligt villkor eftersom $25x + 7y = \frac{d}{13}$ alltid har lösningar då $13 \mid d$ ty $\text{SGD}(25, 7) = 1$. Vi kan till exempel välja $d = 13$ och då ser vi lätt att $25x + 7y = 1$ har en lösning $x = 2, y = -7$ eller $d = 26$ då ekvationen $25x + 7y = 2$ har en lösning $x = 2 \cdot 2 = 4, y = (-7) \cdot 2 = -14$.

rest lämnar $x^2 + y^2 + z^2$ vid division med 3? Motivera att $x^2 + y^2 + z^2$ inte kan vara en kvadrat av ett heltal.

Vi kan anta att $[x]_3 = 0$, $[y]_3 = 1$, $[z]_3 = 2$ (x, y, z lämnar olika rester vid division med 3). Då är $[x]_3^2 = 0$, $[y]_3^2 = 1$, $[z]_3^2 = 1$ dvs $[x^2 + y^2 + z^2]_3 = [x^2]_3 + [y^2]_3 + [z^2]_3 = 2$. Detta ger svaret på den första frågan.

Vi observerar att $[x^2]_3 = 0$ eller 1 (dvs resten av en kvadrat vid division med 3 är lika med 0 eller 1) så att summan $x^2 + y^2 + z^2$ aldrig är en kvadrat eftersom den lämnar resren 2 vid division med 3 (om x, y, z lämnar olika rester vid division med 3).

5. **Bevisa med matematisk induktion att för alla naturliga tal n gäller likheten:**

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.$$

Om $n = 1$ får vi VL = $1^2 = 1$ och HL = $\frac{1 \cdot (4 \cdot 1^2 - 1)}{3} = 1$ dvs VL = HL.

Nu antar vi att likheten gäller då $n = k \geq 1$ dvs

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3}$$

och visar att denna likhet gäller då $n = k + 1$ dvs

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(4(k+1)^2 - 1)}{3}.$$

Vi har

$$\text{VL} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3} + (2k+1)^2 =$$

$$\frac{k(4k^2 - 1) + 3(2k+1)^2}{3} = \frac{4k^3 - k + 3(4k^2 + 4k + 1)}{3} = \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 3}{3}$$

och

$$\text{HL} = \frac{(k+1)(4(k+1)^2 - 1)}{3} = \frac{(k+1)(4k^2 + 8k + 3)}{3} = \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 3}{3}.$$

Alltså är VL = HL. Enligt induktionsprincipen gäller likheten för alla $n = 1, 2, \dots$

6. **(a) Bevisa att det finns oändligt många primtal.**

(b) Ge exempel på 12 konsekutiva naturliga tal $k, k+1, \dots, k+11$ som inte är primtal.

(a) Se Vretblads bok eller stencilen "Delbarhet och primtal".

(b) Ett "standardexempel" (från föreläsningar) är $13! + 2, 13! + 3, \dots, 13! + 13$ (tolv tal som följer efter varandra och som inte är primtal). Ett mycket enklare exempel är $114, 115, 116, 117, 118, 119 = 7 \cdot 17, 120, 121 = 11^2, 122, 123, 124, 125, 126$ (det är t o m 13 tal som följer efter varandra och som inte är primtal; 113 och 127 är primtal).

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2$$

När gäller likhet?

Vi har:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

Den sista olikheten är sann så att även vår ursprungliga olikhet gäller för godtyckliga $a, b > 0$.
Likhet får man då och endast då $(a - b)^2 = 0$ dvs $a = b$.