

1. (a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera följande utsaga: För varje reellt tal x finns det ett reellt tal y så att $x + y$ är ett heltal och $x - y$ är ett heltal. Är denna utsaga sann eller falsk? Motivera Ditt påstående.
(b) Formulera negationen till utsagan i (a) (så att negationssymbolen “ $\neg$ ” inte förekommer i svaret). Vilken logisk sanning (tautologi) använder Du?
(Du kan beteckna mängden av reella tal med t ex $\mathbb{R}$ och heltal med $\mathbb{Z}$).
2. Låt A, B, C vara mängder. Betrakta mängderna $(A \setminus B) \cup C$ och $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$ och rita motsvarande Venn-diagram. Bevisa, utan att använda dessa diagram, att en av de två mängderna är en del av den andra. Är mängderna rentav alltid lika? Motivera Ditt svar nog.
3. (a) Uppdelar talen 176400 och 7260 i primfaktorer. Beräkna största gemensamma delaren till dessa två tal.
(b) Hur definieras minsta gemensamma multipeln till två heltal a och b . Beräkna minsta gemensamma multipeln för talen i (a).
4. Bestäm alla heltaliga lösningar till ekvationen $13x - 5y = 1$ och bevisa att det endast finns en lösning sådan att både x och y är primtal.
5. (a) Motivera att för ett godtyckligt heltal a är talet $a^{61} - a$ delbart med 61.
(b) Motivera också att talet $a^{61} - a$ är delbart med 2, 3, 5, 7, 11, 13 och 31.
6. Bevisa med matematisk induktion att

$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \cdots + (2n - 1)3^{n-1} = (n - 1)3^n + 1.$$

för varje $n = 1, 2, 3, \dots$

7. Låt a, b vara positiva reella tal. Bevisa olikheter:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{och} \quad ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$$

och utnyttja dessa två för att visa olikheten:

$$(a + 1)(b + 1) \geq 4\sqrt{ab}.$$

När gäller likhet?

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 18p. Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 14 november. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den 14 november: tel. 772 5388.