

1. (a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera följande utsaga: För varje reellt tal x finns det ett reellt tal y så att $x + y$ är ett heltal och $x - y$ är ett heltal. Är denna utsaga sann eller falsk? Motivera Ditt påstående.

(b) Formulera negationen till utsagan i (a) (så att negationssymbolen “ $\neg$ ” inte förekommer i svaret). Vilken logisk sanning (tautologi) använder Du?

(Du kan beteckna mängden av reella tal med t ex $\mathbb{R}$ och heltal med $\mathbb{Z}$).

(a) Utsagan säger: $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x + y) \in \mathbb{Z} \wedge (x - y) \in \mathbb{Z}$. Utsagan är falsk. Om vi väljer $x = \frac{1}{3}$ och y är ett godtyckligt reellt tal så kan inte både $\frac{1}{3} + y$ och $\frac{1}{3} - y$ vara heltal. Om nämligen $\frac{1}{3} + y$ och $\frac{1}{3} - y$ är heltal så är också deras summa $(\frac{1}{3} + y) + (\frac{1}{3} - y) = \frac{2}{3}$ ett heltal, vilket är falskt.

(b) Negationen säger: $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : (x + y) \notin \mathbb{Z} \vee (x - y) \notin \mathbb{Z}$. Vi har använt här de Morgans lagar bl a $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

2. Låt A, B, C vara mängder. Betrakta mängderna $(A \setminus B) \cup C$ och $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$ och rita motsvarande Venn-diagram. Bevisa, utan att använda dessa diagram, att en av de två mängderna är en del av den andra. Är mängderna rentav alltid lika? Motivera Ditt svar nog.

När man ritar ett Venn-diagram ser man att den andra mängden är en del av den första dvs $(A \cup C) \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup C$. Bevis:

$$x \in (A \cup C) \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A \setminus B) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup C$$

Observera att utsagan $x \in C \wedge x \notin C$ är falsk (den är utelämnad).

Rent allmänt är de två mängderna $(A \setminus B) \cup C$ och $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$ inte lika. Detta framgår klart och tydligt från Venn-diagrammet, men man kan också ge enkla exempel utan att rita. Om $A = B = C = \{1\}$ så är $(A \setminus B) \cup C = \{1\}$ och $(A \cup C) \setminus (B \cup C) = \emptyset$. Men om $C = \emptyset$ så är dessa mängder lika.

3. (a) Uppdela talen 176400 och 7260 i primfaktorer. Beräkna största gemensamma delaren till dessa två tal.

(b) Hur definieras minsta gemensamma multipeln till två heltal a och b . Beräkna minsta gemensamma multipeln för talen i (a).

(a) Vi dividerar successivt bägge talen med små primfaktorer och får $a = 176400 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ och $b = 7260 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$. Genom att välja de gemensamma primfaktorerna får vi $\text{SGD}(a, b) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Det är inte svårt att beräkna $\text{SGD}(a, b)$ med Euklides algoritmen (med det var inte nödvändigt i samband med frågan).

(b) För definition av MGM se kursboken eller stencilen “Delbarhet och primtal”. Genom att välja primfaktorerna eller med hjälp av formeln $\text{MGM}(a, b) = \frac{ab}{\text{SGD}(a, b)}$ får vi $\text{MGM}(a, b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$.

4. Bestäm alla heltaliga lösningar till ekvationen $13x - 5y = 1$ och bevisa att det endast finns en lösning sådan att både x och y är primtal.

Man hittar utan problem en partikulär lösning $x_0 = 2, y_0 = 5$. Vi har $13x - 5y = 13x_0 - 5y_0$ så att $13(x - x_0) = 5(y - y_0)$. Alltså dividerar 5 skillnaden $x - x_0$ så att $x - x_0 = 5k$ för ett heltal k . Insättning i ekvationen ger $13 \cdot 5k = 5(y - y_0)$ dvs $y - y_0 = 13k$. Alltså får vi alla lösningar: $x = x_0 + 5k = 2 + 5k$ och $y = y_0 + 13k = 5 + 13k, k$ ett godtyckligt heltal.

För att hitta alla lösningar (x, y) sådana att x, y är primtal observerar vi att $(2, 5)$ är en sådan lösning. Vi visar att det inte finns några andra. Om k är jämnt så är x jämnt och den enda möjligheten för att x skall vara primt är $x = 2$ dvs $k = 0$. Detta ger lösningen $x = 2, y = 5$. Om k är udda så är y jämnt och den enda möjligheten är $y = 5 + 13k = 2$, men då är inte k ett heltal. Alltså finns det endast en möjlighet: $x = 2, y = 5$.

(b) Motivera också att talet $a^{61} - a$ är delbart med 2, 3, 5, 7, 11, 13 och 31.

(a) 61 är ett primtal. Alltså i enlighet med Fermats lilla sats gäller $61|a^{61} - a$ för varje heltal a .

(b) Vi har $a^{61} - a = a(a^{60} - 1)$. Om a är delbart med något av talen 2, 3, 5, 7, 11, 13 och 31 så är också $a^{61} - a$ delbart med detta tal. Antag att a inte är delbart med något av dessa tal. Vi har $(a^{60})^1 - 1 = (a^{30})^2 - 1 = (a^{15})^4 - 1 = (a^{10})^6 - 1 = (a^6)^{10} - 1 = (a^5)^{12} - 1 = (a^2)^{30} - 1$ så att delbarhet av $a^{60} - 1$ med 2, 3, 5, 7, 11, 13 och 31 följer från Fermats lilla sats för dessa primtal.

6. Bevisa med matematisk induktion att

$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + (2n - 1)3^{n-1} = (n - 1)3^n + 1.$$

för varje $n = 1, 2, 3, \dots$

Om $n = 1$ får vi VL = 1 och HL = $(1 - 1)3^1 + 1 = 1$. Antag att likheten gäller då $n = k$ dvs

$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + (2k - 1)3^{k-1} = (k - 1)3^k + 1.$$

Vi vill visa att likheten gäller då $n = k + 1$ dvs

$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + (2k - 1)3^{k-1} + (2k + 1)3^k = k3^{k+1} + 1.$$

Bevis:

$$1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + (2k - 1)3^{k-1} + (2k + 1)3^k = (k - 1)3^k + 1 + (2k + 1)3^k =$$

$$(k - 1 + 2k + 1)3^k + 1 = 3k3^k + 1 = k3^{k+1} + 1.$$

Enligt induktionsprincipen gäller likheten för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

7. Låt a, b vara positiva reella tal. Bevisa olikheter:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{och} \quad ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$$

och utnyttja dessa två för att visa olikheten:

$$(a + 1)(b + 1) \geq 4\sqrt{ab}.$$

När gäller likhet?

Vi har

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Eftersom den sista olikheten är sann så är också den första i raden ovan. På samma sätt visas att den andra olikheten gäller:

$$ab + 1 \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab - 2\sqrt{ab} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{ab} - 1)^2 \geq 0.$$

Genom att addera de två olikheterna ledvis får man:

$$ab + 1 + a + b \geq 4\sqrt{ab} \quad \text{dvs} \quad (a + 1)(b + 1) \geq 4\sqrt{ab}.$$

Likhet i den sista olikheten gäller då och endast då den gäller i bägge olikheterna dvs $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ och $\sqrt{ab} - 1 = 0$, vilket ger $a = b$ och $ab = 1$. Alltså gäller likhet precis då $a = b = 1$.