

1. (a) Vad menas med absolutbeloppet och argumentet av ett komplext tal z ? Ge geometriska tolkningar av dessa begrepp.
(b) Bestäm alla komplexa tal z sådana att $z^2 = i|z|^2$. Ge en geometrisk tolkning av lösningsmängden.

(a) Se kursboken.

(b) Metod 1. Låt $z = a + bi$. Vi har $|z|^2 = a^2 + b^2$, så den givna likheten är ekvivalent med $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = i(a^2 + b^2)$. Alltså är $a^2 - b^2 = 0$ och $2ab = a^2 + b^2$. Den andra likheten innebär att $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = 0$ dvs $a = b$. Men $a = b$ ger automatiskt att $a^2 - b^2 = 0$, så att den givna likheten är ekvivalent med att $a = b$. Svaret är att $z = a + ai$. I det komplexa planet ligger alla sådana z på bissektisen av vinklarna mellan den reella och imaginära axeln som går genom den första och tredje kvadranten.

Metod 2. Vi vet att $|z|^2 = z\bar{z}$. Om $z = 0$ så gäller likheten $z^2 = i|z|^2$. Antag att $z \neq 0$. Då ger $z^2 = iz\bar{z}$ att $z = i\bar{z}$. Alltså är $z = a + bi = i(a - bi)$ dvs $a + bi = b + ai$, vilket ger $a = b$. Samma svar och samma tolkning som i Metod 1.

2. Lös ekvationen $iz^2 + (1 - 5i)z + (1 + 18i) = 0$ och skriv dess rötter på formen $a + bi$, där a, b är reella tal.

Först multiplicerar vi ekvationen med $-i$. Vi får då: $z^2 - (5 + i)z + (18 - i) = 0$. Alltså är

$$z = \frac{5+i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5+i}{2}\right)^2 - (18-i)} = \frac{5+i}{2} \pm \sqrt{\frac{-48+14i}{4}} = \frac{5+i}{2} \pm \frac{\sqrt{-48+14i}}{2}.$$

Vi måste beräkna $\sqrt{-48+14i} = x + yi$. Genom att kvadrera får vi $(x + yi)^2 = -48 + 14i$ så att $x^2 + 2xyi - y^2 = -48 + 14i$. Alltså är $x^2 - y^2 = -48$ och $2xy = 14$. Genom att beräkna absolutbeloppet får vi $x^2 + y^2 = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50$. Ur $x^2 - y^2 = -48$ och $x^2 + y^2 = 50$ följer $x^2 = 2$ och $y^2 = 49$. Eftersom $xy = 7$ så är $x = 1, y = 7$ eller $x = -1, y = -7$ dvs $\sqrt{-48+14i} = \pm(1 + 7i)$. Alltså är

$$z_{1,2} = \frac{5+i}{2} \pm \frac{\sqrt{-48+14i}}{2} = \frac{5+i}{2} \pm \frac{1+7i}{2} = 3 + 4i \text{ eller } 2 - 3i.$$

3. (a) Beräkna resten vid division av $p(X) = X^{100} + X^{99} + \dots + X + 1$ med $X - 1$.
(b) Formulera och bevisa faktorsatsen.

(a) Resten vid division av ett polynom $p(X)$ med $X - a$ är lika med $p(a)$, så att i detta fall är resten $p(1) = 1^{100} + 1^{99} + \dots + 1 + 1 = 101$.

(b) Se kursboken.

4. Faktorisera polynomet $p(X) = X^4 - 2X^2 - 24$ i produkt av irreducibla faktorer i polynomringarna $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$. Motivera noga Dina påståenden!

Vi har $p(X) = X^4 - 2X^2 - 24 = X^4 - 2X^2 + 1 - 25 = (X^2 - 1)^2 - 5^2 = (X^2 - 1 - 5)(X^2 - 1 + 5) = (X^2 - 6)(X^2 + 4)$. Faktorerna $X^2 - 6$, $X^2 + 4$ är irreducibla i $\mathbb{Q}[X]$ eftersom dessa två andragradspolynom saknar rationella nollställen.

I $\mathbb{R}[X]$ har vi $p(X) = (X^2 - 6)(X^2 + 4) = (X - \sqrt{6})(X + \sqrt{6})(X^2 + 4)$ och polynomet $X^2 + 4$ är irreducibelt i $\mathbb{R}[X]$ eftersom det saknar reella rötter.

I $\mathbb{C}[X]$ fortsätter vi: $p(X) = (X - \sqrt{6})(X + \sqrt{6})(X^2 + 4) = (X - \sqrt{6})(X + \sqrt{6})(X - 2i)(X + 2i)$. Alla polynom av grad 1 är irreducibla (det gäller alla fall ovan).

- (a) En ekvivalensrelation på en mängd M .
- (b) En relation på en mängd M som är reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv.
- (c) Ett polynom med reella koefficienter med ett dubbelt nollställe i och ett tripelt nollställe 2.

Motivera noga Dina svar!

(a) Låt M vara mängden av alla elever i en skola och låt två elever x och y vara relaterade, dvs $x \sim y$, precis då x och y går i samma klass. Man kontrollerar att " $\sim$ " är en ekvivalensrelation på M : $x \sim x$ (ty x och x går i samma klass), $x \sim y$ ger $y \sim x$ (ty x och y går i samma klass ger att y och x går i samma klass), och slutligen, $x \sim y$ och $y \sim z$ ger $x \sim z$ (ty x och y går i samma klass samt y och z går i samma klass ger att x och z går i samma klass).

(b) Låt $M = \{2, 3, 4, \dots\}$ mängden av alla naturliga tal $x > 1$. Definiera relationen $x \sim y \Leftrightarrow x$ och y har (minst) en gemensam primdelare. Då är relationen reflexiv dvs $x \sim x$ (ty x och x har en gemensam primdelare) och symmetrisk dvs $x \sim y$ medför $y \sim x$ (ty om x och y har en primdelare så har y och x en sådan). Relationen är inte transitiv. Tag $x = 6$, $y = 15$ och $z = 35$. Då är $x \sim y$ (3 är en gemensam primdelare) och $y \sim z$ (5 är en gemensam primdelare), men $x \not\sim z$ ty x och z saknar gemensamma primdelare.

(c) Ett sådant polynom måste innehålla faktorerna $(X-i)^2$ (i en dubbelrot) och $(X-2)^3$ (2 en trippelrot). Eftersom polynomet skall ha reella koefficienter så måste också finnas den konjugerade roten $-i$ med multipliciteten 2 dvs faktorn $(X+i)^2$. Alltså är svaret $p(X) = (X-i)^2(X+i)^2(X-2)^3 = (X^2+1)^2(X-2)^3$.

6. (a) Definiera begreppen talring och talkropp.

(b) Visa att alla tal $a + b\sqrt{11}$, där $a, b \in \mathbb{Q}$, bildar en talkropp K .

(a) Se stencilen om talsystem.

(b) Vi måste visa att den givna talmängden är sluten med avseende på de fyra räknesätten. addition, subtraktion, multiplikation och division. Vi har $(a + b\sqrt{11}) \pm (c + d\sqrt{11}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{11}$, $(a + b\sqrt{11})(c + d\sqrt{11}) = (ac + 11bd) + (ad + bc)\sqrt{11}$. Låt $c + d\sqrt{11} \neq 0$. Då är $c - d\sqrt{11} \neq 0$ ty $c - d\sqrt{11} = 0$ ger att $\sqrt{11} = c/d$ är rationellt om $d \neq 0$. Om $d = 0$ så är $c = 0$, men då är $c + d\sqrt{11} = 0$, vilket strider mot antagandet. Vi har:

$$\frac{a + b\sqrt{11}}{c + d\sqrt{11}} = \frac{(a + b\sqrt{11})(c - d\sqrt{11})}{(c + d\sqrt{11})(c - d\sqrt{11})} = \frac{ac - 11bd}{c^2 - 11d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 11d^2}\sqrt{11} = e + f\sqrt{11},$$

där

$e = \frac{ac - 11bd}{c^2 - 11d^2}$ och $f = \frac{bc - ad}{c^2 - 11d^2}$ är rationella tal.

7. (a) Ge exempel på en uppräknelig och en icke-uppräknelig mängd. Bevisa ett av Dina påståenden.

(b) Låt $A = \mathbb{Q}$ vara mängden av alla rationella tal och B mängden av alla icke-rationella reella tal. Vad är mängden $A \cup B$? Är mängden B uppräknelig eller icke-uppräknelig? Motivera noga alla Dina svar!

(a) Ett exempel på en uppräknelig mängd är heltalen, på en icke-uppräknelig (överuppräknelig) är de reella talen. För bevisen se stencilen "Ändligt och oändligt".

(b) Mängden $A \cup B$ är lika med alla reella tal dvs $A \cup B = \mathbb{R}$. Som vi vet är denna mängd icke-uppräknelig. Eftersom mängden av de rationella talen $A = \mathbb{Q}$ är uppräknelig så måste mängden B av de icke-rationella talen vara icke-uppräknelig. Detta beror på att unionen av två uppräkneliga mängder är uppräknelig (se samma stencil) så att om B hade varit uppräknelig så skulle de reella talen $\mathbb{R}$ vara en uppräknelig mängd, vilket är falskt.