LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN
i LMA 100 del B 2003-04-12

1. **Låt $z = \frac{1-i}{1+i}$. Skriv följande tre tal på formen $a+bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$:**

   (a) z, **(b)** $z^2\bar{z}$, **(c)** $\frac{z^2}{\bar{z}|z|}$.

   (a) $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$.

   (b) $z^2\bar{z} = \frac{(-i)^2}{i} = \frac{-1}{i} = i$.

   (c) $\frac{z^2}{\bar{z}|z|} = \frac{-1}{i} = i$ ty $|z| = 1$.

2. **Lös ekvationen $z^4 = 2+2i$ och skriv dess rötter på formen $a+bi$, där a, b är reella tal.**

   Vi har $|2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ och $\arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$. Alltså är de fyra lösningarna till den givna ekvationen: $z_0 = \sqrt[4]{\sqrt{8}}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}) = \sqrt[8]{8}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})$, $z_1 = \sqrt[8]{8}(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16})$, $z_2 = \sqrt[8]{8}(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16})$, $z_3 = \sqrt[8]{8}(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16})$.

3. **Är polynomet $x^{34} + ix^{30} + x^4 - x$ delbart med polynomet $x+i$? Motivera noga Ditt svar! Vilken eller vilka satser använder Du för att besvara frågan?**

   Enligt faktorsatsen är det givna polynomet delbart med $x+i$ då och endast då $-i$ är dess nollställe. Vi kontrollerar att $(-i)^{34} + i(-i)^{30} + (-i)^4 - (-i) = (-1)^{17} + i(-1)^{15} + 1 + i = -1 - i + 1 + i = 0$, ty $(-i)^2 = -1$ och $(-i)^4 = 1$. Alltså är $-i$ ett nollställe till det givna polynomet så att polynomet är delbart med $x+i$.

4. **Förkorta så långt som möjligt**

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - 5x - 3}.$$

   Euklides algoritm ger $x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = (x^3-x^2-5x-3)(x+4)+13(x^2+2x+1)$ och $x^3-x^2-5x-3 = (x^2+2x+1)(x-3)$. Alltså är $\mathrm{SGD}(x^4+3x^3+4x^2+3x+1, x^3-x^2-5x-3) = x^2+2x+1$. Vi har $x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = (x^2+2x+1)(x^2+x+1)$ så att

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - 5x - 3} = \frac{(x^2+2x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+2x+1)(x-3)} = \frac{x^2+x+1}{x-3}.$$

5. **(a) Definiera vad man menar med en ekvivalensrelation på en mängd X. Definiera begreppet ekvivalensklass för $x \in X$. Exemplifiera Dina definitioner.**

   (b) Bevisa att ekvivalensklasser av en ekvivalensrelation på X ger en partition av X i parvis disjunkta delmängder.

   (a) och (b). För definition av begreppen ekvivalnsrelation och ekvivalensklass samt bevis av satsen i (b) se Vretblads bok eller stencilen om relationer.

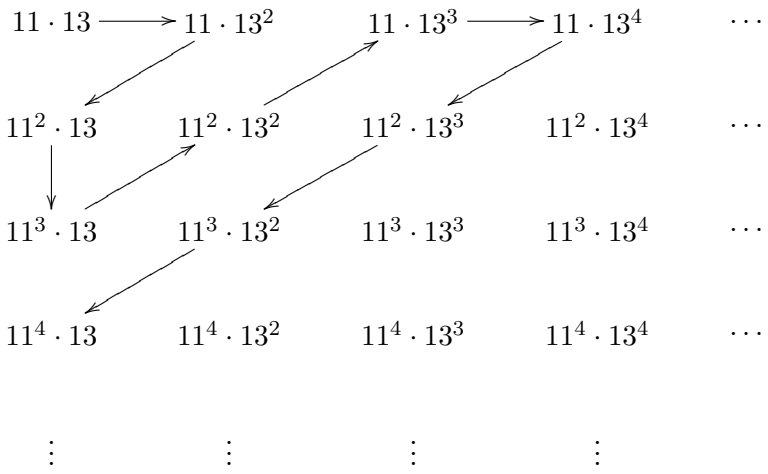
6. **Vad är det som skiljer en talkropp från en talring? Ge tre exempel på talringar som inte är talkroppar. Motivera väl Dina påståenden!**

Se stencilen om talsystem. Heltalen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$ (de Gaussiska heltalen) och $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ är tre exempel på talringar som inte är kroppar. I vart och ett av dessa fall har vi att talen 1 och 2 tillhör ringen, men deras kvot $\frac{1}{2}$ tillhör inte denna.

7. **(a) Motivera att alla tal $11^k 13^l$, där k, l är positiva heltal, bildar en uppräknelig mängd.**

(b) Är mängden av alla icke-rationella reella tal uppräknelig eller icke-uppräknelig? Motivera noga svaret på denna fråga!

(a) En möjlighet att bevisa påståendet är att skriva talen i form av en tabell



Därefter numreras talen i enlighet med pilarnas väg. En annan möjlighet är att konstatera att de givna talen är en delmängd till de naturliga talen som bildar en uppräknelig mängd. Alltså är den givna mängden uppräknelig som en oändlig delmängd till en uppräknelig mängd.

(b) Mängden A av de icke-rationella reella talen är icke uppräknelig. Vi har nämligen $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{Q}$, där $\mathbb{R}$ betecknar de reella talen och $\mathbb{Q}$ de rationella. Eftersom de rationella talen är uppräkneliga så skulle likheten innebära att de reella talen är unionen av två uppräkneliga mängder. En sådan union är uppräknelig (se stencilen "Ändligt och oändligt"), vilket strider mot att de reella talen inte är uppräkneliga (se samma stencil).