

1. (a) Beräkna resten vid division av $p(X) = X^{100} + X^{99} + \dots + X + 1$ med $X - 1$.

(b) Formulera och bevisa faktorsatsen.

(a) Resten vid division av ett polynom $p(X)$ med $X - a$ är lika med $p(a)$, så att i detta fall är resten $p(1) = 1^{100} + 1^{99} + \dots + 1 + 1 = 101$.

(b) Se kursboken.

2. Faktoruppdelar polynomet $p(X) = X^4 - 2X^2 - 24$ i produkt av irreducibla faktorer i polynomringarna $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$. Motivera noga Dina påståenden!

Vi har $p(X) = X^4 - 2X^2 - 24 = X^4 - 2X^2 + 1 - 25 = (X^2 - 1)^2 - 5^2 = (X^2 - 1 - 5)(X^2 - 1 + 5) = (X^2 - 6)(X^2 + 4)$. Faktorerna $X^2 - 6$, $X^2 + 4$ är irreducibla i $\mathbb{Q}[X]$ eftersom dessa två andragradspolynom saknar rationella nollställen.

I $\mathbb{R}[X]$ har vi $p(X) = (X^2 - 6)(X^2 + 4) = (X - \sqrt{6})(X + \sqrt{6})(X^2 + 4)$ och polynomet $X^2 + 4$ är irreducibelt i $\mathbb{R}[X]$ eftersom det saknar reella rötter.

I $\mathbb{C}[X]$ fortsätter vi: $p(X) = (X - \sqrt{6})(X + \sqrt{6})(X^2 + 4) = (X - \sqrt{6})(X + \sqrt{6})(X - 2i)(X + 2i)$. Alla polynom av grad 1 är irreducibla (det gäller alla fall ovan).

3. Ge exempel på:

(a) En ekvivalensrelation på en mängd M .

(b) En relation på en mängd M som är reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv.

(c) Ett polynom med reella koefficienter med ett dubbelt nollställe i och ett tripelt nollställe 2.

Motivera noga Dina svar!

(a) Låt M vara mängden av alla elever i en skola och låt två elever x och y vara relaterade, dvs $x \sim y$, precis då x och y går i samma klass. Man kontrollerar att " $\sim$ " är en ekvivalensrelation på M : $x \sim x$ (ty x och x går i samma klass), $x \sim y$ ger $y \sim x$ (ty x och y går i samma klass ger att y och x går i samma klass), och slutligen, $x \sim y$ och $y \sim z$ ger $x \sim z$ (ty x och y går i samma klass samt y och z går i samma klass ger att x och z går i samma klass).

(b) Låt $M = \{2, 3, 4, \dots\}$ mängden av alla naturliga tal $x > 1$. Definiera relationen $x \sim y \Leftrightarrow x$ och y har (minst) en gemensam primdelare. Då är relationen reflexiv dvs $x \sim x$ (ty x och x har en gemensam primdelare) och symmetrisk dvs $x \sim y$ medför $y \sim x$ (ty om x och y har en primdelare så har y och x en sådan). Relationen är inte transitiv. Tag $x = 6$, $y = 15$ och $z = 35$. Då är $x \sim y$ (3 är en gemensam primdelare) och $y \sim z$ (5 är en gemensam primdelare), men $x \not\sim z$ ty x och z saknar gemensamma primdelare.

(c) Ett sådant polynom måste innehålla faktorerna $(X - i)^2$ (i en dubbelrot) och $(X - 2)^3$ (2 en trippelrot). Eftersom polynomet skall ha reella koefficienter så måste också finnas den konjugerade roten $-i$ med multipliciteten 2 dvs faktorn $(X + i)^2$. Alltså är svaret $p(X) = (X - i)^2(X + i)^2(X - 2)^3 = (X^2 + 1)^2(X - 2)^3$.

4. (a) Definiera begreppen talring och talkropp.

(b) Visa att alla tal $a + b\sqrt{11}$, där $a, b \in \mathbb{Q}$, bildar en talkropp K .

(a) Se stencilen om talsystem.

(b) Vi måste visa att den givna talmängden är sluten med avseende på de fyra räknesätten. addition, subtraktion, multiplikation och division. Vi har $(a + b\sqrt{11}) \pm (c + d\sqrt{11}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{11}$, $(a + b\sqrt{11})(c + d\sqrt{11}) = (ac + 11bd) + (ad + bc)\sqrt{11}$. Låt $c + d\sqrt{11} \neq 0$. Då är $c - d\sqrt{11} \neq 0$ ty $c - d\sqrt{11} = 0$ ger att $\sqrt{11} = c/d$ är rationellt om $d \neq 0$. Om $d = 0$ så är $c = 0$, men då är $c + d\sqrt{11} = 0$, vilket strider mot antagandet. Vi har:

$$\frac{a + b\sqrt{11}}{c + d\sqrt{11}} = \frac{(a + b\sqrt{11})(c - d\sqrt{11})}{(c + d\sqrt{11})(c - d\sqrt{11})} = \frac{ac - 11bd}{c^2 - 11d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 11d^2}\sqrt{11} = e + f\sqrt{11},$$

där

$e = \frac{ac - 11bd}{c^2 - 11d^2}$ och $f = \frac{bc - ad}{c^2 - 11d^2}$ är rationella tal.

Se kompendiet om Euklidisk geometri.

6. Visa att de tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.

Se kompendiet om Euklidisk geometri.

7. I fyrhörningen $ABCD$ skär diagonalerna varandra mitt itu. Visa att fyrhörningen $ABCD$ är en parallelogram.

Låt M vara skärningspunkten. Motsatta vinklarna $\angle AMB$ och $\angle CMD$ är lika. Givet är att $|AM| = |CM|$, $|BM| = |DM|$. Enligt S-V-S är $\triangle AMD \cong \triangle CMD$, så vinklarna $\angle CAB$ och $\angle ACD$ är lika och därmed är $AB \parallel CD$. På samma sätt ger $\triangle AMD \cong \triangle CMB$ att $AD \parallel BC$, vilket visar att $ABCD$ är en parallelogram.

8. Hur många femsiffriga telefonnummer (utan riktnummer) har minst två siffror lika?

Det finns sammanlagt $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ telefonnummer bestående av fem siffror – den första kan väljas på 9 olika sätt (alla siffror 0,1,2,...,9 med undantag av 0), och de övriga siffrorna på 10 olika sätt.

Det finns $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ telefonnummer med 5 olika siffror ty den första kan väljas på 9 olika sätt (som ovan), den andra kan därefter väljas på 9 olika sätt (alla utom den första siffran, men nollan är tillåten), den tredje siffran på 8 olika sätt (alla bland 0,1,2,...,9 med undantag av de två redan valda) osv.

Alltså är antalet telefonnummer med minst två lika siffror $90000 - 27216 = 62784$.