HT02
LMA100: Diskret Matematik
Göteborgs universitet
SK

Blandade övningar till 8 nov.

1. Visa att $n^3 + 3n^2 - 4n$ är delbart med 6 för alla $n \geq 0$.

2. Formulera delbarhetstest för talen 15, 30.

3. En viss PIN-kod består av fyra tecken, som vart och ett är en av de 26 bokstäverna A - Z eller en av siffrorna 0 - 9.

   a) Hur många olika PIN-koder kan bildas om alla fyra tecken måste vara olika?

   b) Hur många finns det om tecken får upprepas i koden och den börjar med en bokstav?

   c) Hur många finns det med en 1:a och en 2:a och två olika bokstäver?

4. Från en grupp om 120 personer ska väljas en styrelse om 5 personer. Personerna A och B ställer som vilkor att om en av dem väljs, så ska båda väljas. På hur många olika sätt kan då styrelsen sammansättas?

5. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)2^k = -2 + 2^{n+1}(n^2+1)$$
för $n = 1, 2, 3 \ldots$.

6. Hur många arrangemang av siffrorna 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 finns det, om den första siffran skall vara större än 1 och den sista mindre än 8?

7. Hur många n-siffriga tal kan man bilda med hjälp av siffrorna 1 oooch 2, omm talen skall inehålla minst en etta och minst en tvåa? ($n \geq 2$.)

8. Bland Uppsalas 149300 invånare finns det en grupp på minst ..?.. personer, som har samma sista fyra siffror i personnumeret.

9. Betrakta koden $C = \{(010100), (111000), (011010), (101010)\}$. Är C linjär? Vad har C för vikten? minimiavståndet? Hur många fel upptäcker den? korrigerar?

10. Den n-dimensionella kuben Q_n är den graf, vilkens noder kan beskrivas med "ord" av formen $a_1 a_2 \cdots a_n$, där var och en av a_k är en nolla eller etta, och de kanter som finns med i kuben är precis de som förbinder noder som skiljer sig åt på ett ställe i sina beskrivningar.

   a) Rita en bild av 4-kuben Q_4!

   b) Bestäm antalet noder i den n-dimensionella kuben Q_n.

Facit

1 Låt $a = n^3 + 3n^2 - 4n = n(n^2 + 3n - 4) = n(n-1)(n+4)$. Vi skall bevisa att a är delbart med 6. a är jämnt, eftersom antingen n eller $(n-1)$ är jämnt. Så är det räcker att visa att a är delbart med 3, eftersom $6 = 2 \cdot 3$. Om n eller $(n-1)$ är delbart med 3, det är ok, då är a delbart med 3. Annars har vi att $(n+1)$ måste vara delbart med 3 ($(n-1)$, n och $(n+1)$ är tre efterföljande tal). Men om $(n+1)$ är delbart med 3, då måste $(n+4)$ vara delbart med 3 (det är enkelt att se), därför a är delbart med 3.

2. Om siffersumman av talet a är delbar med 3 och den sista siffran är antingen 0 eller 5, är a delbart med $15 = 3 \cdot 5$. Om siffersumman av talet b är delbar med 3 och den sista siffran är 0, är b delbart med $30 = 3 \cdot 10$.

3. Vi har totalt 36 tecken att arbeta med.

a) Antalet permutationen av 4 tecken valda bland 36 är ju $P(36, 4) = 1413720$ stycken.

b) Antalet blir $26 \cdot 36^3 = 1213056$ stycken.

c) Antalet blir $2 \cdot \binom{4}{2} \cdot P(26, 2) = 7800$.

4. Antingen båda A och B är i styrelsen eller båda A och B inte är i styrelsen. Alltså svaret blir

$$\binom{118}{3} + \binom{118}{5}.$$

6. Om den första siffran är 8 eller 9, då kan vi välja den sista siffran på 8 sätt (bland siffrorna 0,1,...,7) och sedan permutera de siffrorna som är kvara på 8! sätt. Alltså har vi $2 \cdot 8 \cdot 8! = 645120$ möjligheter. Annars kan vi välja den första siffran på 6 sätt (bland siffrorna 2,3,...,7), sedan välja den sista

siffran på 7 sätt (bland siffrorna 0,1,...,7 utom den första siffran), och sedan permutera de siffrorna som är kvar på 8! sätt. Alltså har vi $6 \cdot 7 \cdot 8! = 1693440$ möjligheter. Alttså totalt 2338560.

7. $2^n - 2$.

8. 15.

9. C är inte linjär eftersom bl.a. $(000000) \notin C$. Vikten är 2. Minimiavståndet är 2. C upptäcker ett fel, men kan inte korrigera fel.

10. b) 2^n.