Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 100 och MAL 200, Geometri och linjär algebra, 20020529

1. **Formulera och bevisa Pythagoras' sats.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri och övningarna.

2. **I fyrhörningen $ABCD$ gäller att diagonalerna AC och BD är vinkelräta mot varandra. Visa att $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.**

   Låt P vara diagonalernas skärningspunkt. Pythagoras sats ger $|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$, $|BC|^2 = |BP|^2 + |CP|^2$, $|CD|^2 = |CP|^2 + |DP|^2$ och $|AD|^2 = |AP|^2 + |DP|^2$. Därmed är $|AB|^2 + |CD|^2 = |AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

3. **Visa att diagonalerna i en parallellogram skär varandra mitt itu.**

   Alternatvinklarna $\angle CAB$ och $\angle ACD$ är lika, liksom $\angle ACB$ och $\angle CAD$. Fallet (V–S–V) ger $\Delta ACB \cong \Delta CAD$ och därmed $|AD| = |BC|$. Låt M vara diagonalernas skärningspunkt. Alternatvinklarna $\angle ADB$ och $\angle CBD$ är lika, så $\Delta AMD \cong \Delta CMB$, (V–S–V). Detta betyder att $|AM| = |MC|$ och $|BM| = |MD|$.

4. **Undersök om vektorerna**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \textbf{och} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   ligger i samma plan.

   Om vektorerna ligger i ett plan finns det tal λ, μ och ν, inte alla noll, med

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \, .$$

   De första två element ger $\mu = -\nu = -3\lambda$, men $-\lambda + 9\lambda + 6\lambda = 0$ leder då till $14\lambda = 0$. Därför ligger de inte i samma plan.
   Uppgiften kan också lösas genom att beräkna vektorernas trippelprodukt.

5. **Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 0)$ och $(4, 1, -5)$.**

   Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.
   Ekvationen är $14x - y + 6z = 25$.

6. Bestäm minsta avståndet från punkten $(1, 1, 1)$ till linjen genom punkterna $(2, 3, 0)$ och $(4, 1, -5)$.

Linjen genom $(2, 3, 0)$ och $(4, 1, -5)$ ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst när $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1+2t \\ -2-2t \\ 1-5t \end{pmatrix}$ är vinkelrät mot $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, d v s $0 = \begin{pmatrix} -1+2t \\ -2-2t \\ 1-5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -2(-1+2t)+2(-2-2t)+5(1-5t) = 3-33t$. Så $t = \frac{1}{11}$ och avståndet är längden av vektorn $\begin{pmatrix} -9/11 \\ -24/11 \\ 6/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Svaret är $\frac{3}{11}\sqrt{9+64+4} = \frac{3}{11}\sqrt{77}$.

7. Visa att en punkt P ligger på mittpunktsnormalen till sträckan AB om och endast om P ligger på samma avstånd från A och B.

Antag att P ligger på mittpunktsnormalen. Låt M vara skärningspunkten mellan linjen AB och normalen. Drag AP och BP. Eftersom $|AM| = |BM|$, vinklarna $\angle AMP$ och $\angle BMP$ är räta och MP är gemensam är $\Delta AMP \cong \Delta BMP$. Därför är $|AP| = |BP|$.
Omvänt, antag att $|AP| = |BP|$. Låt M vara mittpunkten på AB och drag MP. Nu är $\Delta AMP \cong \Delta BMP$ (S–S–S). Detta betyder att sidovinklarna $\angle AMP$ och $\angle BMP$ är kongruenta, alltså räta. Därför är linjen MP mittpunktsnormalen.