Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 100, Geometri och linjär algebra, 20030113

1. Formulera och bevisa Pythagoras' sats.

Se kompendiet om Euklidisk geometri och övningarna.

2. Visa att de tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.

Se kompendiet om Euklidisk geometri.

3. I fyrhörningen $ABCD$ skär diagonalerna varandra mitt itu. Visa att fyrhörningen $ABCD$ är en parallellogram.

Låt M vara skärningspunkten. Motsatta vinklarna $\angle AMB$ och $\angle CMD$ är lika. Givet är att $|AM| = |CM|$, $|BM| = |DM|$. Enligt S–V–S är $\Delta AMD \cong \Delta CMD$, så vinklarna $\angle CAB$ och $\angle ACD$ är lika och därmed är $AB \parallel CD$. På samma sätt ger $\Delta AMD \cong \Delta CMB$ att $AD \parallel BC$, vilket visar att $ABCD$ är en parallellogram.

4. Bestäm alla enhetsvektorer som är vinkelräta mot både

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

En normal vektor är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ har längd $\sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2} = 3$. Enhetsvektorerna med samma eller motsatt riktning är $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

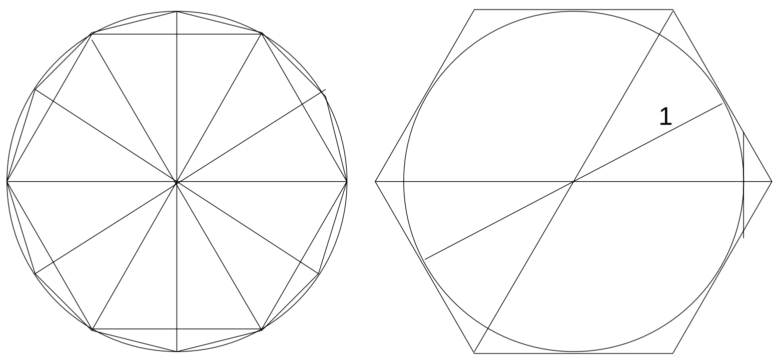
5. Bestäm minsta avståndet från punkten $(7, 4, 2)$ till linjen genom punkterna $(3, 1, 1)$ och $(1, 0, 1)$.

Linjen genom $(3, 1, 1)$ och $(1, 0, 1)$ ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst när $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2t \\ -4+t \\ -1 \end{pmatrix}$ är vinkelrät mot $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d v s $0 = \begin{pmatrix} -6+2t \\ -4+t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(-6+2t) + (-4+t) = -16 + 5t$. Så $t = \frac{16}{5}$ och avståndet är längden av vektorn $\begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Svaret är $\frac{1}{5}\sqrt{4 + 16 + 25} = \frac{1}{5}\sqrt{45} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$.

6. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(3,1,1)$, $(1,0,1)$ och $(7,4,2)$.

Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.
Ekvationen är $x - 2y + 2z = 3$.

7. Givet en cirkel av radie 1, beräkna arean av de inskrivna och omskrivna regelbundna 6- och 12-hörningarna.



Den inskrivna 6-hörningen består av 6 liksidiga trianglar med sidan 1, så arean är $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
Den inskrivna 12-hörningen består av 12 likbenta trianglar med benen 1 och höjden mot ett ben $\frac{1}{2}$, så arean är $12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$.
Den omskrivna 6-hörningen består av 6 liksidiga trianglar med höjden 1 och alltså sidan $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, så arean är $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}$.
Den omskrivna 12-hörningen uppstår ur den omskrivna 6-hörningen genom att skära bort 12 $30°/60°/90°$-trianglar med kort katet $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$ och alltså lång katet $\sqrt{3}(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$, så den bortskurna arean är $12 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 14\sqrt{3} - 24$ och 12-hörningens area är $2\sqrt{3} - (14\sqrt{3} - 24) = 24 - 12\sqrt{3}$.