MATEMATIK
Göteborgs universitet js

Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 100 / MAL200, Geometri och linjär algebra, 20030526

1. **Formulera och bevisa Pythagoras' sats.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri och övningarna.

2. **Visa att de tre mittpunktsnormalerna i en triangel skär varandra i en punkt.**

   Vi visar först att en punkt P ligger på mittpunktsnormalen till en sträcka AB om och endast om P ligger på samma avstånd från A och B:
   Antag att P ligger på mittpunktsnormalen. Låt M vara skärningspunkten mellan linjen AB och normalen. Drag AP och BP. Eftersom $|AM| = |BM|$, vinklarna $\angle AMP$ och $\angle BMP$ är räta och MP är gemensam är $\Delta AMP \cong \Delta BMP$. Därför är $|AP| = |BP|$.
   Omvänt, antag att $|AP| = |BP|$. Låt M vara mittpunkten på AB och drag MP. Nu är $\Delta AMP \cong \Delta BMP$ (S–S–S). Detta betyder att sidovinklarna $\angle AMP$ och $\angle BMP$ är kongruenta, alltså räta. Därför är linjen MP mittpunktsnormalen.
   Betrakta nu triangeln ΔABC. Drag mittpunktsnormalerna till AB och AC, som skär varandra i punkten P. Eftersom P ligger på mittpunktsnormalen till AB är $|AP| = |BP|$ och eftersom P ligger på mittpunktsnormalen till AC är $|AP| = |CP|$. Detta ger att $|BP| = |CP|$ och därmed ligger P även på mittpunktsnormalen till BC, så alla tre mittpunktsnormaler går genom P.

3. **Bevisa periferivinkelsatsen: en periferivinkel i en cirkel är hälften av medelpunktsvinkeln på samma båge.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri.

4. **I fyrhörningen $ABCD$ är motstående vinklar lika stora. Visa att fyrhörningen är en parallellogram.**

   Drag diagonalen AC. Då är $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD = \angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$. Eftersom $\angle B = \angle D$ och vinkelsumman i en triangel är $180°$ är $\angle BAC + \angle BCA = \angle CAD + \angle ACD$. Första ekvationen ger $\angle BAC - \angle ACD = \angle BCA - \angle CAD$, medan den andra ger $\angle BAC - \angle ACD = \angle CAD - \angle BCA = -(\angle BCA - \angle CAD)$. Därför är $\angle BAC - \angle ACD = 0$, d v s $\angle BAC = \angle ACD$ och därmed är AB parallell med DC. Vi får också $\angle CAD = \angle BCA$, så AD och BC är parallella. Detta visar att fyrhörningen är en parallellogram.

5. **Bestäm minsta avståndet från punkten $(4, 2, 2)$ till linjen genom punkterna $(3, 1, 1)$ och $(1, 0, 1)$.**

   Linjen genom $(3, 1, 1)$ och $(1, 0, 1)$ ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst när $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2t \\ -2+t \\ -1 \end{pmatrix}$ är vinkelrät mot $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d v s $0 = \begin{pmatrix} -3+2t \\ -2+t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(-3+2t) + (-2+t) = -8 + 5t$. Så $t = \frac{8}{5}$ och avståndet är längden av vektorn $\begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Svaret är $\frac{1}{5}\sqrt{1+4+25} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$.

6. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(3,1,1)$, $(1,0,1)$ och $(4,2,2)$.

Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.
Ekvationen är $x - 2y + z = 2$.

7. Låt $O = (0,0)$, $A = (10,0)$ och $B = (4,6)$ vara tre punkter i planet. Beräkna medelpunkten och radien för den om triangeln ΔOAB omskrivna cirkeln. Ange cirkelns ekvation.

Medelpunkten är skärningpunkten av mittpunktsnormalen $x = 5$ till OA och mittpunktsnormalen till OB. En normalvektor till OB är $\binom{3}{-2}$ så mittpunktsnormalen ges i parameterform som $\binom{x}{y} = \binom{2}{3} + t\binom{3}{-2}$. Om $x = 5$ är $t = 1$, så medelpunkten M är $(5,1)$. Radien är $|OM| = \sqrt{26}$ och ekvationen är $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 26$ eller $x^2 + y^2 - 10x - 2y = 0$.