MATEMATIK js
Göteborgs universitet

Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 100 , Geometri och linjär algebra, 20040112

1. **Formulera och bevisa Pythagoras' sats.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri och övningarna.

2. **Visa att en fyrhörning är en parallellogram om och endast om dess diagonaler delar varandra mitt itu.**

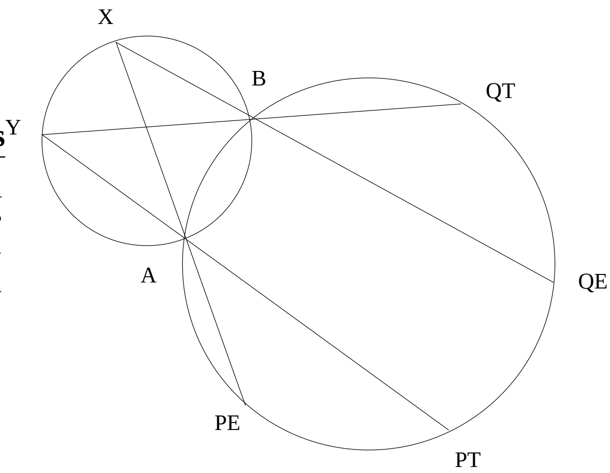
   Antag att diagonalerna delar varandra mitt itu. Låt M vara skärningspunkten. Motsatta vinklarna $\angle AMB$ och $\angle CMD$ är lika. Givet är att $|AM| = |CM|$, $|BM| = |DM|$. Enligt S–V–S är $\triangle AMD \cong \triangle CMD$, så vinklarna $\angle CAB$ och $\angle ACD$ är lika och därmed är $AB \parallel CD$. På samma sätt ger $\triangle AMD \cong \triangle CMB$ att $AD \parallel BC$, vilket visar att $ABCD$ är en parallellogram.
   Omvänt, alternatvinklarna $\angle CAB$ och $\angle ACD$ är lika, liksom $\angle ACB$ och $\angle CAD$. Fallet (V–S–V) ger $\triangle ACB \cong \triangle CAD$ och därmed $|AD| = |BC|$. Låt M vara diagonalernas skärningspunkt. Alternatvinklarna $\angle ADB$ och $\angle CBD$ är lika, så $\triangle AMD \cong \triangle CMB$, (V–S–V). Detta betyder att $|AM| = |MC|$ och $|BM| = |MD|$.

3. **Visa att vinkelsumman i en triangel är $180°$.**

   Dra i $\triangle ABC$ en linje DE genom C, parallell med AB Alternatvinklarna $\angle ABC$ och $\angle BCE$ är kongruenta, liksom $\angle BAC$ och $\angle ACD$. Därmed är vinkelsumman i triangeln lika med vinkelsumman $\angle ACD$ plus $\angle C$ plus $\angle BCE$, som är $180°$.

4. **Två cirklar skär varandra i punkterna A och B. Från två punkter X och Y på den ena cirkeln dras linjerna XA, XB, YA och YB, som skär den andra cirkeln i punkterna P_1, Q_1, P_2 och Q_2 (se figuren nedan).**

PSfrag replacements
A
B
X
Y
Q_1
Q_2
P_1
P_2



   Visa att cirkelbågarna P_1Q_1 och P_2Q_2 är lika stora.

   Vinklarna $\angle YAX$ och $\angle YBX$ är lika som periferivinklar på samma båge YX. Deras motstående vinklar $\angle P_1AP_2$ och $\angle Q_1BQ_2$ är därmed också lika stora. Bågarna P_1P_2 och Q_1Q_2 är således lika stora. Genom att lägga till bågen P_2Q_1 får vi att cirkelbågarna P_1Q_1 och P_2Q_2 är lika stora.

5. Bestäm minsta avståndet från punkten $(4, -2, 2)$ till linjen genom punkterna $(3, -1, 1)$ och $(1, 0, 1)$.

Linjen genom $(3, -1, 1)$ och $(1, 0, 1)$ ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst när $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2t \\ 2-t \\ -1 \end{pmatrix}$ är vinkelrät mot $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d v s $0 = \begin{pmatrix} -3+2t \\ 2-t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(-3+2t) - (2-t) = -8+5t$. Så $t = \frac{8}{5}$ och avståndet är längden av vektorn $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Svaret är $\frac{1}{5}\sqrt{1+4+25} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$.

6. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(3, 0, 2)$, $(1, -1, 2)$ och $(4, 1, 3)$.

Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. En annan normalvektor är $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ekvationen är $x - 2y + z = 5$.

7. Bestäm den geometriska betydelsen av ekvationen $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 6$.

Kvadratkomplettering ger ekvationen $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 11$, som beskriver en cirkel med medelpinku $(-2, 1)$ och radie $\sqrt{11}$.