1

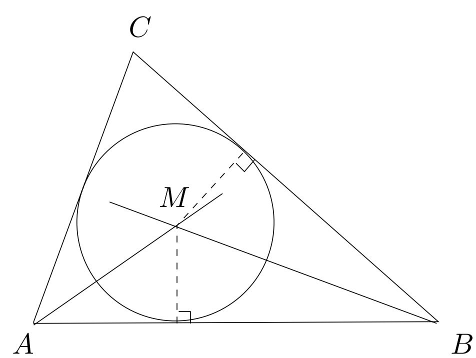
Speciella punkter i en triangel

I en triangel skär bisektriserna varandra i en punkt, liksom mittpunktsnormalerna, medianerna och höjderna.

Bisektrisen till en vinkel är den linje eller stråle som delar vinkeln mittitu. En punkt i vinkelns fält ligger på bisektrisen om och endast om punkten har samma avstånd till båda vinkelbenen (detta är en inlämningsuppgift). Avståndet mellan punkten P och linjen l betecknas som $d(P, l)$ och är längden av sträckan PQ, där Q är fotpunkt till normalen till l genom P.

(1.1) Sats. *De tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. I triangeln $\triangle ABC$ dras bisektriserna till vinklarna $\sphericalangle A$ och $\sphericalangle B$. Låt M vara deras skärningspunkt. Att M ligger på vinkeln $\sphericalangle A$:s bisektris innebär att $d(M, AB) = d(M, AC)$. Eftersom M också ligger på $\sphericalangle B$:s bisektris gäller även att $d(M, BA) = d(M, BC)$. Men då är $d(M, CA) = d(M, CB)$ och därmed ligger M på $\sphericalangle C$:s bisektris. De tre bisektriserna skär varandra i M. $\square$



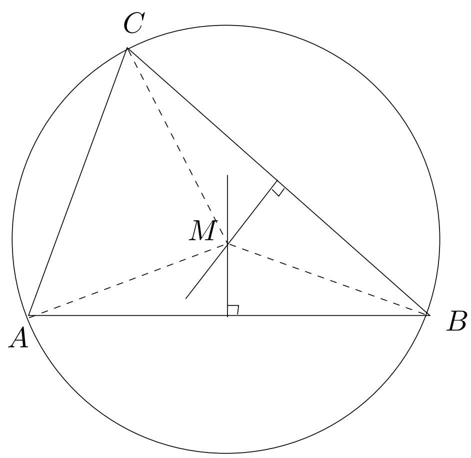
LMA100, ht 03

(1.2) Anmärkning. Bisektrisernas skärningspunkt är medelpunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln. □

Mittpunktsnormalen till en sträcka AB är normalen genom mittpunkten på AB. Som övning lämnas att visa att en punkt P ligger på mittpunktsnormalen till sträckan AB om och endast om P ligger på samma avstånd från A och B.

(1.3) Sats. *De tre mittpunktsnormalerna i en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. I triangeln $\triangle ABC$ dras mittpunktsnormalerna till sidorna AB och BC. Låt M vara deras skärningspunkt. Att M ligger på AB:s mittpunktsnormal innebär att $|MA| = |MB|$. Eftersom M också ligger på BC:s mittpunktsnormal gäller även att $|MB| = |MC|$. Men då är $|MA| = |MC|$ och därmed ligger M på AC:s mittpunktsnormal. De tre mittpunktsnormalerna skär varandra i M. □

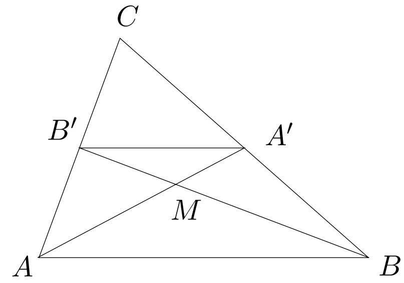


(1.4) Anmärkning. Mittpunktsnormalernas skärningspunkt är medelpunkten för den i triangeln omskrivna cirkeln. □

En *median* i en triangel är en sträcka som sammanbinder ett hörn med mittpunkten på motstående sida.

(1.5) Sats. *Medianerna till en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. I triangeln $\triangle ABC$ dras medianerna AA' och BB', som skär varandra i punkten M, samt linjen $B'A'$, som sammanbinder mittpunkterna A' på BC och B' på AC. Triangeln $\triangle ABC$ är likformig med $\triangle B'A'C$ enligt 1:a likformighetsfallet. Detta medför att $B'A'$ är parallell med AB och att $|AB| : |B'A'| = 2 : 1$.



Därför är alternatvinklarna $\sphericalangle A'AB$ och $\sphericalangle AA'B'$ lika stora, liksom alternatvinklarna $\sphericalangle ABB'$ och $\sphericalangle BB'A'$. Så $\triangle ABM \sim \triangle A'B'M$. Då gäller att $|AM| : |A'M| = |AB| : |A'B'| = 2 : 1$, d v s medianen genom B skär medianen AA' i punkten M som ligger på avståndet $\frac{1}{3}|AA'|$ från A'. På samma sätt visas att medianen genom C skär medianen AA' i samma punkt M på avståndet $\frac{1}{3}|AA'|$ från A'. De tre medianerna skär varandra i M. $\square$

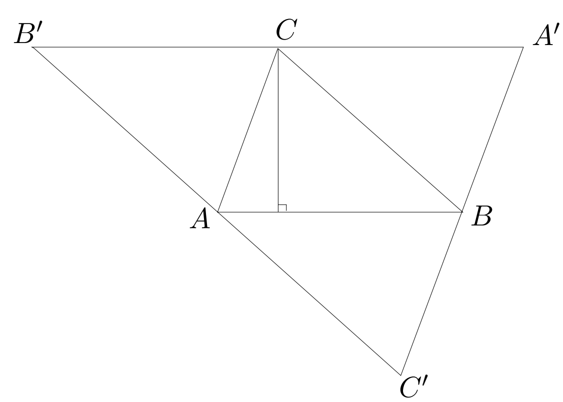
(1.6) Följdsats. *Medianerna delar varandra i förhållandet* $2 : 1$.

(1.7) Anmärkning. Medianernas skärningspunkt kallas triangelns *tyngdpunkt*. Tyngdpunkten är lika med triangelns tyngdpunkt i fysikalisk mening.

$\square$

En *höjd* i en triangel är en normal från ett hörn till motstående sida eller dess förlägning (när ligger höjden utanför triangeln?).

(1.8) Sats. *De tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.*

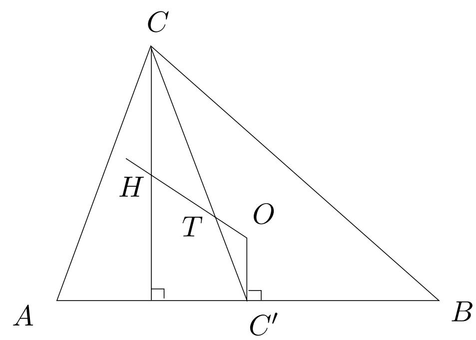


Bevis. Dra $B'A'$ parallell med AB genom C, $C'B'$ parallell med BC genom A och $A'C'$ parallell med CA genom B. Då är $\triangle ABC \cong \triangle A'CB$ eftersom $\sphericalangle ABC$ och $\sphericalangle BCA'$ är alternatvinklar, liksom $\sphericalangle ACB$ och $\sphericalangle CBA'$, och sträckan BC är gemensam. Likadant är

$\triangle CB'A \cong \triangle ABC \cong \triangle BAC'$. Dra nu höjden från C. Den är vinkelrätt mot $A'B'$, ty $A'B'$ är parallell med AB. Eftersom $|B'C| = |AB| = |CA'|$ är höjden genom C också mittpunktsnormal på $B'A'$. Höjderna i $\triangle ABC$ är mittpunktsnormalerna i $\triangle A'B'C'$ och skär därför varandra i en punkt. □

(1.9) Anmärkning. Konstruktionen av den inskrivna och omskrivna cirkeln finns redan hos Euklides, men höjder och medianer inte. Att höjderna skär varandra i en punkt visades först av Euler, liksom följande resultatet. □

(1.10) Sats. *I en triangel ligger höjdernas skärningspunkt, tyngdpunkten och den omskrivna cirkelns medelpunkt på en linje (den s k Eulerlinje).*



Bevis. Dra i triangeln $\triangle ABC$ höjden mot AB och medianen CC' från C och mittpunktsnormalen på AB. Låt H vara skärningspunkten mellan höjden och linjen OT genom tyngdpunkten T och den omskrivna cirkelns medelpunkt O. Då är $\sphericalangle HCC' \cong \sphericalangle CC'O$ (alternatvinklar) och $\sphericalangle CTH \cong \sphericalangle OTC'$ (motstående vinklar). Trianglarna $\triangle CTH$ och $\triangle OTC'$ är likformiga med $|HT| : |TH| = |CT| : |TC'| = 2 : 1$. Höjden från C går således genom en bestämd punkt (H) på linjen OT. De två andra höjderna går också genom H, som är därmed höjdernas skärningspunkt. (Detta visar igen att höjderna skär varandra i en punkt.) □