

Avsnitt 1

MATEMATIKENS SPRÅK

Varje vetenskap, liksom varje yrke, har sitt eget språk som ofta är en blandning av vardagliga ord och speciella termer. En instruktionshandbok för ett kylskåp eller för en dator är full av olika termer som man måste förstå för att kunna ha användning av apparaten. Ibland kan yrkestermer översättas till vardagliga uttryck då man vill förklara något för den oinvidga. Men ofta är en sådan översättning omöjlig. Det är tänkbart att nya vetenskapliga rön i biologi om t ex växternas liv, eller nya forskningsresultat om läkemedel, kan förklaras utan komplicerade facktermer. När det gäller matematik är situationen annorlunda. Det är mycket svårt och egentligen omöjligt att förklara matematiska problem utan det matematiska språket även på en mycket låg nivå. Precis som man lär sig främmande språk för att t ex kunna kommunicera på engelska, måste man lära sig det matematiska språket för att kunna använda matematik och diskutera matematik med andra. Precis som med främmande språk lär man sig det matematiska språket successivt. Samtidigt måste man hela tiden vara medveten om att det är oerhört viktigt att förstå vad orden betyder för att undvika missförstånd och kunna uttrycka sig korrekt. Det matematiska språket består av olika termer och beteckningar. Dessa termer påminner ibland om vardagliga uttryck. Men man måste vara mycket försiktig därför att vardagliga termer kan leda våra associationer i fel riktning. Vi får se i detta avsnitt att t ex sådana ord som "eller" eller "och" används i matematiska sammanhang i en mycket bestämd mening som ibland avviker från vår vardagliga användning av dessa ord. Samma situation förekommer med främmande språk – vi tror ibland att ett engelskt ord betyder något annat än vad det verkligen gör därför att ordet påminner om ett svenskt ord. I matematiska sammanhang introduceras nya termer och begrepp i form av **definitioner**. Ofta i sådana sammanhang skriver man uttryckligen ordet "definition". Men ibland definieras nya matematiska begrepp i den löpande texten. Vi skall försöka använda fet stil då en ny term introduceras. Detta avsnitt ägnas åt de logiska konnektiven som t ex "eller", "och", "om ..., så ..." samt "då och endast då" som mycket ofta används i det matematiska språket. Vi diskuterar också uttrycken "för alla" och "det finns". Samtidigt introducerar vi några vanliga matematiska beteckningar.

Låt oss börja med ett exempel som visar att betydelsen av ordet "eller" i vardagliga situationer kan variera.

(1.1) Exempel. Låt oss betrakta två meningar:

"I kväll läser jag eller går på bio"

Detta påstående består egentligen av två meningar: $p = \text{"I kväll läser jag"}$ och $q = \text{"I kväll går jag på bio"}$. I matematiska sammanhang brukar man använda symbolen $\vee$ i stället för "eller". Vi kan skriva vårt påstående på formen

$$p \vee q.$$

När är detta påstående sant? Det är klart att det är sant om jag läser i kväll. Det är också sant om jag går på bio i kväll. Men det är också sant då jag både läser och går på bio under kvällen.

Betrakta nu ett annat påstående:

"I kväll flyger jag till New York eller till Kairo"

Här har vi också två beståndsdelar $p = \text{"I kväll flyger jag till New York"}$ och $q = \text{"I kväll flyger jag till Kairo"}$. Men bindeordet "eller" betyder här snarare "antingen p eller q " – enligt våra kunskaper om världen endast en av möjligheterna kan inträffa, dvs meningen är sann om exakt en av utsagorna visar sig vara sann. I matematiska sammanhang tolkas betydelsen av "eller" alltid i enlighet med det första exemplet. Vi formulerar en exakt definition om en liten stund. $\square$

I fortsättningen betecknar vi meningar eller vad man kallar i matematiska sammanhang **utsagor** med olika bokstäver $a, b, c, \dots, p, q, r$. Nu ger vi följande definition:

(1.2) Definition. Om p och q är två utsagor så kallas utsagan " p eller q " för **disjunktion**. Den betecknas med $p \vee q$. Disjunktionen $p \vee q$ är sann då minst en av utsagorna p eller q är sann. $\square$

Detta visar att i matematiska sammanhang kommer man överens att sanningen av en utsaga " p eller q " tolkas i enlighet med den första möjligheten i exempel (1.1).

Vårt intresse är snarare inriktat på matematiska utsagor som t ex $2 + 2 = 4$ eller $2 + 2 = 5$. Vi sysslar endast med **utsagor som antingen är sanna eller falska**. Den förutsättningen gäller inte alla utsagor i vardagliga situationer. T ex kan vi inte säga om följande utsaga är sann eller falsk: "Kanske har jag lust att gå på bio". Om en matematisk utsaga p är sann så säger vi att p har **logiska värdet** eller kortare **(sannings)värdet** S (eller ibland 1). Om p är falsk så säger vi att p har logiska värdet F (eller ibland 0). Utsagan $2 + 2 = 4$ har sanningsvärdet S , däremot har $2 + 2 = 5$ sanningsvärdet F . Ibland kommer vi att skriva $v(p) = S$ om utsagan p är sann, och $v(p) = F$ om den är falsk.

Nu kan vi beskriva värdet av disjunktionen $p \vee q$ beroende på värdena av p och q med hjälp av följande tabell:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	S	S
S	F	S
S	S	S

Nu övergår vi till ordet ”och”. Här finns det inte någon skillnad mellan den vardagliga betydelsen och den matematiska. Om vi säger

I kväll läser jag och går på bio

så är den utsagan sann precis då både utsagan $p = \text{”I kväll läser jag”}$ och utsagan $q = \text{”I kväll går jag på bio”}$ är sanna. En formell definition är följande.

(1.3) Definition. Om p och q är två utsagor så kallas utsagan ” p och q ” för **konjunktion**. Den betecknas med $p \wedge q$. Konjunktionen $p \wedge q$ är sann exakt då både p och q är sanna.

□

En tabell som visar sanningsvärdet av $p \wedge q$ beroende på sanningsvärdena av p och q är följande:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	S	F
S	F	F
S	S	S

Det är något svårare att hantera en annan mycket vanlig konstruktion: ”om ... så ...”. T ex

Om vädret är bra i kväll, så tar vi en lång promenad

Här har vi två utsagor $p = \text{”Vädret är bra i kväll”}$ och $q = \text{”Vi tar en lång promenad”}$. Med hjälp av p och q konstruerar vi den nya utsagan ”Om p så q ” som kallas **implikation** och betecknas med $p \Rightarrow q$. I stället för ”Om p så q ” använder man ofta andra uttryck som t ex

p medför (att) q

eller

p implicerar (att) q .

Innan vi formulerar den exakta definitionen låt oss betrakta följande exempel:

(1.4) Exempel. Låt n beteckna ett heltal, $p(n)$ utsagan ”6 delar n ” och $q(n)$ utsagan ”3 delar n ”. Varje utsaga

$$6 \text{ delar } n \text{ implicerar att } 3 \text{ delar } n$$

dvs $p(n) \Rightarrow q(n)$ är onekligen sann. Men låt oss testa den utsagan för olika värden på n . Om $n = 12$ så säger den:

$$6 \text{ delar } 12 \text{ implicerar att } 3 \text{ delar } 12,$$

om $n = 13$ får vi

$$6 \text{ delar } 13 \text{ implicerar att } 3 \text{ delar } 13,$$

och för $n = 15$:

$$6 \text{ delar } 15 \text{ implicerar att } 3 \text{ delar } 15.$$

Observera att alla dessa utsagor är sanna. Men i första fallet är både $p(12)$ och $q(12)$ sanna, i det andra är både $p(13)$ och $q(13)$ falska, däremot i det tredje är $p(15)$ falsk, men $q(15)$ sann. $\square$

Observera att i det sista exemplet saknas endast fallet då en sann utsaga implicerar en falsk. Detta är också grunden för den exakta definitionen av sanningsvärdet av en implikation nedan – en implikation är falsk endast då en sanning implicerar en osanning. Däremot kan en osanning implicera vad som helst – både sanning och osanning.

(1.5) Definition. Om p och q är två utsagor så kallas utsagan ”om p , så q ” för **implikation**. Den betecknas med $p \Rightarrow q$. Implikationen $p \Rightarrow q$ är falsk enbart då p är sann och q är falsk. $\square$

Tabellen för sanningsvärdet av implikationen $p \Rightarrow q$ är således följande:

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

(1.6) Anmärkning. Observera att implikationen $p \Rightarrow q$ alltid är sann då p är falsk. Således är t ex implikationen:

$$(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$$

sann. Men om en implikation $p \Rightarrow q$ är sann och p är sann så måste även q vara sann. Den observationen spelar en mycket viktig roll i logiska resonemang både i vardagliga situationer och i matematiska sammanhang. Ofta kallar man p för **förutsättning** eller **antagande**. Man kallar q för **slutsats** eller **påstående**. Alltså om förutsättningen är sann och implikationen

$$\text{förutsättning} \Rightarrow \text{slutsats}$$

är sann, så är slutsatsen sann. □

(1.7) Anmärkning. Vi har redan noterat att man uttrycker implikationen $p \Rightarrow q$ på flera olika sätt

om p så q ,

p medför (att) q ,

p implicerar (att) q .

Men det finns två andra sätt. Man säger också att

p är tillräckligt för (att) q

eller

q är nödvändigt för (att) p .

Försök formulera dessa utsagor med p och q i exempel (1.4) och tänk igenom de så konstruerade meningarna för att inse att även i det vardagliga språket överensstämmer detta uttrycksätt med uttrycken ”medför att” eller ”implicerar”. □

En annan viktig konstruktion är ” p är ekvivalent med q ”, vilket betecknas med $p \Leftrightarrow q$. Uttrycket ”ekvivalent med” betyder i vardagliga termer att p och q säger samma sak (fast för det mesta på olika sätt). Låt oss även den här gången börja med ett exempel:

(1.8) Exempel. Låt n vara ett godtyckligt heltal, $p(n)$ utsagan ”3 delar n ”, och $q(n)$ utsagan ”3 delar summan av siffrorna i n ”.

3 delar n är ekvivalent med att 3 delar summan av siffrorna i n

är en mycket välkänd egenskap. Låt oss testa den då $n = 12$ och $n = 13$. I första fallet har vi

3 delar 12 är ekvivalent med att 3 delar summan av siffrorna i 12,

medan i det andra

3 delar 13 är ekvivalent med att 3 delar summan av siffrorna i 13.

Bägge utsagorna är sanna, men i det första fallet är både $p(12)$ och $q(12)$ sanna, medan i det andra är både $p(13)$ och $q(13)$ falska. Detta svarar mot en riktig föreställning om en ekvivalens: sanning är ekvivalent med sanning, och osanning är ekvivalent med osanning. Däremot sanning och osanning är inte ekvivalenta. Detta exempel är grunden för vår nästa definition. □

(1.9) Definition. Om p och q är två utsagor så kallas utsagan ” p är ekvivalent med q ” för **ekvivalens**. Den betecknas med $p \Leftrightarrow q$. Ekvivalensen $p \Leftrightarrow q$ är sann enbart då p och q har samma sanningsvärde. $\square$

Detta betyder att sanningstabellen för ekvivalens är följande:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	S
F	S	F
S	F	F
S	S	S

(1.10) Anmärkning. Ekvivalens $p \Leftrightarrow q$ utläses också på flera olika sätt. I stället för ” p är ekvivalent med q ” säger man t ex

p då och endast då q

eller

p om och endast om q

eller

p är nödvändigt och tillräckligt för q .

$\square$

Vi avslutar med en mycket enkel konstruktion – man tar en utsaga och man formulerar en ny ” $ej p$ ” eller ” $det är inte sant att p$ (gäller)”. Den kallas för negation.

(1.11) Definition. Om p är en utsaga så kallas utsagan ” $ej p$ ” för **negationen** av p . Den betecknas med $\neg p$. Utsagorna p och $\neg p$ har motsatta sanningsvärden. $\square$

Den sista meningen betyder att sanningstabellen för negation är följande:

p	$\neg p$
F	S
S	F

De fem symboler som vi har introducerat: $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ kallas för **de logiska konnektiven**. Vanligen har man att göra med mera sammansatta utsagor i vilka fler än ett av dessa konnektiv ingår. T ex

$$[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow [(\neg p \vee \neg q) \wedge r]$$

Uttryck av den här typen kallas allmänt för **satsformer**. Precis som tidigare kan man undersöka det logiska värdet av en satsform beroende på sanningsvärdena av de ingående satserna. Låt oss betrakta några exempel:

(1.12) **Exempel.** (a) Satsformen

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

har olika sanningsvärden beroende på sanningsvärdena av p och q . Vi kan studera dessa sanningsvärden med hjälp av följande tabell:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
F	F	S	S	S
F	S	S	F	F
S	F	F	S	S
S	S	S	S	S

Vi ser att satsformen är falsk enbart om p är falsk och q är sann.

Man kunde komma fram till den slutsatsen mycket snabbare. Man kan nämligen fråga sig när implikationen ovan är falsk. Vi vet att detta inträffar exakt då $v(p \Rightarrow q) = S$ och $v(q \Rightarrow p) = F$. Men den sista likheten gäller exakt då $v(p) = F$ och $v(q) = S$ och då gäller även den första likheten. Detta är just resultatet av vår studie med hjälp av tabellen ovan.

(b) Nu skall vi undersöka sanningsvärdena av satsformen

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

Vi gör det med hjälp av en tabell. Du kan försöka göra det utan tabellen genom att ställa frågan när satsformen är falsk (eller sann, men det går snabbare med den första frågan).

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
F	F	S	F	S	F	S
F	S	S	F	F	F	S
S	F	F	S	S	S	S
S	S	S	F	F	F	S

I detta exempel har vi en ekvivalens av två uttryck: $\neg(p \Rightarrow q)$ och $p \wedge \neg q$. Vi kan uppfatta den ekvivalensen så att implikationen $p \Rightarrow q$ är falsk precis då p är sann och q är falsk. Detta visste vi redan tidigare i samband med vår definition av sanningsvärdet hos en implikation. $\square$

Som vi ser är satsformen i exempel (1.12) (b) alltid sann helt oberoende av vilka sanningsvärden tillskriver man p och q . Sådana satsformer är mycket viktiga därför att de representerar tankemönster som alltid är sanna.

(1.13) Definition. En satsform som är sann för alla möjliga uppsättningar av sanningsvärdena av de ingående variablerna kallas en **tautologi** (ibland en **logisk sanning**). En satsform som är falsk för alla möjliga uppsättningar av sanningsvärdena av de ingående variablerna kallas en **kontradiktion**. $\square$

Ett exempel på en kontradiktion är

$$p \Leftrightarrow \neg p$$

– en sanning kan inte vara ekvivalent med en osanning.

Möjligheten att kontrollera tautologierna som i exempel (1.12) kan användas för att kontrollera om vissa utsagor är korrekta, t ex då man vill bilda negationen av ett påstående. Betrakta följande exempel.

(1.14) Exempel. Olikheten $1 < x < 5$ kan betraktas som en konjunktion $p \wedge q$ om

$$p = "x > 1"$$

och

$$q = "x < 5"$$

Vad betyder att $1 < x < 5$ inte gäller? Försök formulera ett svar på denna fråga! Formellt vill vi omformulera utsagan $\neg(p \wedge q)$. En stunds eftertanke säger att om x inte befinner sig mellan 1 och 5 så måste x vara mindre än eller lika med 1, eller också större än eller lika med 5 dvs

$$\neg[(1 < x) \wedge (x < 5)] \Leftrightarrow [\neg(1 < x) \vee \neg(x < 5)] \Leftrightarrow (x \leq 1 \vee x \geq 5).$$

Vårt resonemang följer följande tautologi: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ som är en av de så kallade **de Morgans lagar** (se nedan). $\square$

Vi lämnar som övningar bevisen av några enkla och viktiga tautologier som används i liknande situationer då man vill bilda negationen av en satsformel. Fler tautologier finns i övningar och i avsnittet om induktiva och deduktiva resonemang.

Den dubbla negationens lag:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p,$$

De Morgans lagar (negationen av en disjunktion och negationen av en konjunktion):

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q),$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

Negationen av en implikation (se Exempel (1.12)):

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

Negationen av en ekvivalens:

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)].$$

Tautologier används ofta i samband med logiska resonemang såväl i matematiska sammanhang som i vardagliga situationer. Vi skall studera flera exempel i avsnittet om deduktion och induktion, men redan nu kan vi betrakta följande (kriminal-)fall:

(1.15) Exempel. Tre misstänkta personer A , B och C berättar var sin version av en händelse. Om A talar sanning så gör B också det. Om C ljugar så ljugar även A . Minst en av A , B , C ljugar. Slutsatsen är att A ljugar. Varför?

Låt $p =$ ” A talar sanning”, $q =$ ” B talar sanning”, $r =$ ” C talar sanning”. Vårt påstående säger att implikationen

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg(p \wedge q \wedge r))] \Rightarrow (\neg p)$$

är sann samtidigt som vi vet att våra förutsättningar gäller. Om vi lyckas visa att implikationen är en tautologi så visar vi att $\neg p$ måste vara sant dvs A ljugar (se (1.6)).

Är implikationen ovan en tautologi? Vi skall inte studera satsformen med hjälp av sanningstabeller som i exempel (1.12). Låt oss i stället anta att implikationen ovan är falsk. Detta inträffar precis då $v(\neg p) = F$ och $v((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg(p \wedge q \wedge r))) = S$. Alltså $v(p) = S$ och $v(p \Rightarrow q) = S$, $v(\neg r \Rightarrow \neg p) = S$ samt $v(\neg(p \wedge q \wedge r)) = S$ dvs $v(p \wedge q \wedge r) = F$.

Likheten $v(p \Rightarrow q) = S$ säger att $v(q) = S$ ty $v(p) = S$. Likheten $v(\neg r \Rightarrow \neg p) = S$ säger att $v(\neg r) = F$ ty $v(\neg p) = F$. Alltså är $v(r) = S$. Nu vet vi att $v(p) = v(q) = v(r) = S$ dvs $v(p \wedge q \wedge r) = S$. Vi har fått en motsägelse – om implikationen ovan inte är en tautologi så är $v(p \wedge q \wedge r) = S$ och $v(p \wedge q \wedge r) = F$. Alltså är implikationen en tautologi.

Om Du tycker att vårt resonemang är svårt kan du försöka kontrollera tautologin med hjälp av en tabell (det blir 8 rader i tabellen!). $\square$

Vi avslutar detta avsnitt med några kommentarer om två mycket vanliga uttryck som används i matematiska sammanhang – ”*det finns*” och ”*för alla*”.

(1.16) Exempel. Betrakta två påståenden:

$$\textit{det finns en reell lösning till ekvationen } x^2 - 3 = 0$$

och

$$\textit{det finns ett heltal som ligger mellan } 1/2 \text{ och } 3/2.$$

Dessa påståenden antecknas på följande sätt:

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 - 3 = 0$$

och

$$\exists_{x \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Symbolen $\exists$ betyder just ”**det finns**”. Observera att vi skriver något nersänkt, liksom index, var vi befinner oss — i första fallet säger vi att det finns ett reellt tal x , och i det andra, att det finns ett heltal x . Användningen av bokstaven x har ingen betydelse. Vi kunde lika gärna byta x mot en annan bokstav. När man utläser symbolen $\exists$ med efterföljande text så använder man vanligen frasen ”*det finns ... sådant att ...*”. Texten säger första påståendet att

$$\textit{”det finns ett reellt tal } x \textit{ sådant att } x^2 - 3 = 0\textit{”}$$

och det andra att

$$\textit{”det finns ett heltal } x \textit{ sådant att } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\textit{”}$$

Som Du säkert märker avviker det formella språket från våra ursprungliga uttryck som dock säger exakt samma sak. Symbolen $\exists$ kallas **existenskvantor**. $\square$

(1.17) Exempel. Betrakta nu två påståenden som använder frasen ”för alla” (ibland ”för varje” eller ”varje”):

$$\text{för varje reellt tal } x \text{ gäller det att } x^2 + 1 > 0$$

och

$$\text{alla heltal är delbara med 2}$$

(det andra påståendet är helt enkelt inte sant, men det har inte någon betydelse för våra exempel). Nu använder vi en annan symbol: $\forall$ som utläses ”**för alla**” (ibland ”**för varje**”) och kallas **allkvantor**. Med hjälp av denna kvantor skriver vi:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 1 > 0$$

och

$$\forall_{n \in \mathbb{Z}} 2 | n$$

Rent formellt utläser vi dessa symboler så här:

$$\text{för alla reella tal } x \text{ gäller det att } x^2 + 1 > 0$$

och

$$\text{för alla heltal } n \text{ gäller det att 2 dividerar } n$$

Det är bara ett annat sätt att säga samma sak som tidigare, att alla heltal är jämna. Vi har ändrat formuleringen för att skriva det hela kortare med hjälp av en matematisk symbol. $\square$

Hur bygger man negationer av uttryck som innehåller allkvantorn eller existenskvantorn? Betrakta ett exempel.

(1.18) Exempel. (a) Låt X vara mängden av alla elever i en skola. $x \in X$ betyder då att x är en av dessa elever. Om vi säger att någon elev i skolan pratar franska, vad är negationen av detta påstående? Rimligen att ingen av eleverna i skolan pratar franska. Om vi vill använda det matematiska uttrycket ”för varje” så kan vi formulera oss så att ”för varje elev x i skolan gäller att x inte pratar franska”. Vi kan gå ett steg längre i våra formaliseringssträvanden. Låt $f(x)$ betyda just att ” x pratar franska”. Då var vårt ursprungliga påstående

$$\exists_{x \in X} f(x)$$

medan dess negation

$$\neg \exists_{x \in X} f(x)$$

betyder detsamma som

$$\forall_{x \in X} \neg f(x).$$

Detta är just den allmänna metoden att bilda negationen av uttrycket $\exists_{x \in X} f(x)$ dvs vi har tautologin:

$$\neg \exists_{x \in X} f(x) \iff \forall_{x \in X} \neg f(x).$$

(b) Vi behåller samma beteckningar och påstår att alla elever i skolan X pratar franska. Med samma beteckningar som ovan skriver vi vårt påstående som

$$\forall_{x \in X} f(x).$$

Vad betyder negationen av detta påstående? Helt klart betyder det att det finns (minst) en elev i skolan som inte pratar franska. Alltså betyder

$$\neg \forall_{x \in X} f(x)$$

detsamma som

$$\exists_{x \in X} \neg f(x).$$

Allmänt har vi tautologin:

$$\neg \forall_{x \in X} f(x) \iff \exists_{x \in X} \neg f(x).$$

□

Vi skall avsluta detta avsnitt med exempel som visar att man måste vara mycket försiktig då man kastar om uttrycken ”*det finns*” och ”*för alla*”.

(1.19) Exempel. Låt X vara mängden av alla gifta kvinnor i Göteborg och Y mängden av alla gifta män i samma stad. Låt $x \in X$ och $y \in Y$. Beteckna med $f(x, y)$ utsagan ” x är gift med y ”. Vad säger påståendet

$$\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} f(x, y) ?$$

Det säger att för varje gift kvinna i Göteborg finns en gift man i Göteborg så att de är gifta – ett rimligt påstående som dock inte behöver vara sant. Vad säger

$$\exists_{y \in Y} \forall_{x \in X} f(x, y) ?$$

Den här gången får vi att det finns en man i Göteborg som är gift med alla kvinnor i staden. Alltså var försiktig då kvantorerna skall placeras! □

ÖVNINGAR

1.1. Visa att följande satsformer är tautologier:

- (a) $\neg(\neg p \wedge p)$ (motsägelselagen),
- (b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (transpositionslag),
- (c) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (Duns–Scotus lag; kan tolkas som att ur ett falskt påstående kan man dra vilken slutsats som helst),
- (d) $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
- (e) $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$,
- (f) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

1.2. Vilka av följande satsformer är tautologier?

- (a) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$;
- (b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$,
- (c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

1.3. Man definierar **Sheffers streck** ” $|$ ” med hjälp av sanningstabellen:

p	q	$p q$
F	F	S
F	S	S
S	F	S
S	S	F

- (a) Motivera att $p|q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.
- (b) Uttryck $\neg p$, $p \vee q$ och $p \wedge q$ med hjälp av Sheffers streck.

1.4. Bilda negationen av följande meningar och använd kvantorer för att skriva både dessa meningar och deras negationer:

- (a) Äpplen är röda;
- (b) Varje pojke tycker om en flicka;
- (c) Varje hund har en svans;

1.5. Är följande resonemang riktiga?

- (a) Låt l, m, p vara tre räta linjer i planet. Om det inte är sant att l är parallell med m eller p inte är parallell med m , så är l parallell med m eller p är parallell med m .
- (b) Kajsa kan logik då och endast då det inte är sant att det inte är sant att Kajsa kan logik.