MATEMATIK
Göteborgs universitet
SK

11 november 2002, kl 8.45 – 13.45
Hjälpmedel: miniräknare
Telefon: 0740-350646
David Carlsson

Tentamensskrivning i LMA100
Diskret matematik
Lösningsförslag

1. a) Eftersom $2|(a-3)$ har vi att $a-3 = 2k$ för något heltal k, dvs. $a = 2k+3$. Så är $3a^2 - 9a = 3(2k+3)^2 - 9(2k+3) = 12k^2 + 18k = 6(2k^2 + 3k)$ som visar att $6|(3a^2 - 9a)$.

   b) Det går bra att visa påståndet med matematisk induktion (då bör man använda bl.a. Binomialsatsen). Annars kan vi bevisa påståndet så här. $n^5 - n = n \cdot (n^4 - 1) = n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) = n \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1)$. Så är $n^5 - 1$ produkt av fyra tal: $(n-1)$, n, $(n+1)$ och $(n^2 + 1)$. Sista siffra s av ett tal n är en av de tio siffrorna mellan 0 och 9. Om s är 0 eller 5, då är n delbart med 5, alltså är produkten delbar med 5, dvs. $n^5 - 1$ är delbart med 5. Om s är 2, 3, 7 eller 8, är sista siffra av n^2 4, 9, 9, eller 4 respektiv, som ger att $(n^2 + 1)$ är delbart med 5. Alltså i detta fal är produkten $(n^5 - 1)$ delbar med 4. Om s är 4 eller 9, är $(n+1)$ delbart med 5, alltså är $n^5 - 1$ delbart med 5. Till sist, om s är 1 eller 6, är $(n-1)$ delbart med 5, dvs. i detta fal är $n^5 - 1$ delbart med 5.

2. För $n = 1$ är $VL = 4$ och $HL = \frac{2+9+13}{6} = 4$. Påståendet är alltså sant för $n = 1$.

   Antag nu att påståendet är sant för något n-värde, säg $n = p$. Då gäller alltså $VL_p = \sum_{k=1}^{p}(k+1)^2 = \dfrac{2p^3 + 9p^2 + 13p}{6} = HL_p$. I så fall blir för $n = p+1$:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(k+1)^2 = VL_p + (p+2)^2 = HL_p + (p+2)^2 =$$
$$\tfrac{2p^3+9p^2+13p}{6} + (p+2)^2 = \tfrac{2p^3+9p^2+13p+6(p^2+4p+4)}{6} = \tfrac{2p^3+15p^2+37p+24}{6},$$

   medan

$$HL_{p+1} = \frac{2(p+1)^3 + 9(p+1)^2 + 13(p+1)}{6} = \frac{2p^3 + 15p^2 + 37p + 24}{6},$$

   dvs. $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har alltså visat att om påståendet är sant för $n = p$, så är det också sant för $n = p+1$. Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 1$.

3. Karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 = 2\lambda + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 3 \text{ eller } \lambda = -1.$$

Alltså $a_n = a \cdot 3^n + b \cdot (-1)^n$.

Vi kan nu bestäma a och b:

$$\begin{cases} 0 = a_0 = a + b \\ 4 = a_1 = 3a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 4 = 3a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

så $a_n = 3^n + (-1)^{n+1}$.

4. Om ett tal a är delbart med 165, är a delbart med 3, 5, 11, eftersom $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Så måste a's siffersumma vara delbar med 3, den sista siffran av a är 0 eller 5, dessutom summan av varannan siffra i talet (entalen, hundratalen, tiotusentalen osv.) minus summan av de övriga siffrorna (tiotalen, tusentalen osv.) är delbar med 11. Alla dessa vilkor gäller för talet 2002000000115115.

5. a) $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ eftersom vi har 2P och 2S. b) Dela upp i fall:

   I. 2P, 2S: $3 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 90$.

   II. 2P, $\leq$1S: $\binom{5}{2}$ sätt att placera de 2 P:na, sedan $4 \cdot 3 \cdot 2$ sätt att i ordning välja 3 bokstäver av U, S, A, T; alltså $\binom{5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 240$.

   III. $\leq$1P, 2S: som II 240.

   IV. $\leq$1P, $\leq$ 1S: vi permuterar 5 bokstäver: U, P, S, A, T på 5!=120 sätt.

   Totalt $90 + 2 \cdot 240 + 120 = 690$.

6. Vi har en linjär kod som beskrivas med matrisen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Kodordet är $x = 10c_1c_21c_3$, där c_1, c_2 och c_3 bestäms av $H \cdot x = 0$, alltså

$$\begin{cases} 1 + 0 + c_1 + 0 + 1 + 0 = 0 \\ 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + c_3 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + c_2 + 1 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

   så $x = 100110$.

   b) Beräkna syndromet $H \cdot x$ för de tre orden: man får

      i.
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
      inget fel – vi fick kodord; meddelande (stryk kontrollbitarna) är 110.

ii.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ fel i bit 3 – kontrollbit så ingen informationsbit behöver ändras; meddelande är 000.

iii.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ eftersom det finns ingen sådan kolumn i H, har vi mer än ett fel och kan inte avkoda.

7. Med en färgläggning av en graf G menas ett sätt att tilldela färger till grafens noder, så att två noder som förbinds av en kant får olika färg. Det minsta antalet färger som möjliggör en färgläggning av G kallas det kromatiska talet för G.