Övning 4

A.1. Den 24 mars är en måndag ($6 - 1 + 24 \equiv 1 \pmod 7$).
A.2. Den 8 april är en tisdag ($6 - 1 + 31 + 8 \equiv 2 \pmod 7$).
A.3. Addera 3 till den aktuella dagens datum ($4 - 1 = 3$).
A.4. Eftersom den 31 dec 2002 var en tisdag (dag 2 i veckan) får januari 2003 ledtalet 2. Eftersom januari har 31 dagar får februari ledtalet $2 + 31 \equiv 5$, mars $5 + 28 \equiv 5$, april $5 + 31 \equiv 1$, maj $1 + 30 \equiv 3$, juni $3 + 31 \equiv 6$, juli $6 + 30 \equiv 1$, augusti $1 + 31 \equiv 4$, september $4 + 31 \equiv 0$, oktober $30 \equiv 2$, november $2 + 31 \equiv 5$ och december $5 + 30 \equiv 0$, allt $\pmod 7$.
B.1.a) 4 b) 1 c) 3
B.2.a) 4 b) 1 (mod 3), (mod 5), (mod 11) och 3 (mod 13) c) 5

C.1.b) $2^{32} + 1 \equiv 2^{4+28} + 1 \equiv -5^4 \cdot 2^{4\cdot 7} + 1 \equiv -(5 \cdot 2^7)^4 + 1 \equiv -(-1)^4 + 1 \equiv 0 \pmod{641}$.
C.2.a) $2^{10} \equiv 1 \pmod{341}$ så $2^{341} - 2 \equiv 2 - 2 \equiv 0 \pmod{341}$.
b) $2^{F_n} \equiv 2 \cdot 2^{2^{2^n}} \equiv 2 \cdot 2^{2^n \cdot 2^{2^n - n}} \equiv 2 \cdot (-1)^{2^{2^n - n}} \equiv 2 \pmod{F_n}$.
D.1.a) Samtliga summor är 0.
D.1.b) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = 0$ modulo n, om n är ett udda positivt heltal.
E.1. $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 4$, $3^{-1} = 5$, $4^{-1} = 2$, $5^{-1} = 3$ och $6^{-1} = 6$. Vidare är summan av dessa inverser 0 i $\mathbb{Z}_7$.
H.1. 59 är det minsta positiva heltal som uppfyller villkoren. ($n + 1 \equiv 0 \pmod{2, 3, 4, 5, 6}$.)
H.2. $n = 548 + m \cdot 900$, $m \in \mathbb{Z}$.

Övning 5

A.2. $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
B.1. $n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$
C.1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{n-1}{n}$
F.1. $21, 28, 36, 45, \ldots$
F.2. $a_{k+1} = a_k + k + 1$ för $k \geq 1$
F.3. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
G.3. Den gemensamma faktorn är 3.
G.4. Den gemensamma faktorn är 3.
G.5. Den gemensamma faktorn är 5.
H.1. $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
H.2. $S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
H.3. $S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
I.1. $n = 2$, 3 drag; $n = 3$, 7 drag; $n = 4$, 15 drag; $n = 5$, 31 drag; $n = 6$, 63 drag; $n = 7$, 127 drag.
I.2. Flytta först de sex översta till den lediga positionen. Placera sedan den sista skivan i sin slutposition och placera sedan de sex återstående skivorna på denna. Om antalet steg för att flytta sex skivor är k så behöver vi $2k + 1$ drag för sju skivor.
I.3. Generalisera resonemanget ovan till att gälla för hur man flyttar $n + 1$ skivor om man kan flytta n skivor och använd detta i induktionssteget.
I.4. Låt $f(n)$ beteckna antal drag som krävs för n skivor. Vi har då $f(1) = 1$ och $f(n) = 2f(n-1) + 1$ för $n \geq 2$. Ur detta fås $f(n) = 2^n - 1$
J. Beviset fungerar inte för fallet då $k = 1$ (då man ska bevisa att två personer har samma ögonfärg).

Övning 6

B.2. Omvändningen är inte sann.
D.1. Likhet fås endast för $x = 1$.
D.4. Visa att $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$.
F.1. Talen är sammansatta $= (n + 1)(n + 2)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.
F.2. Talen är sammansatta $= (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ för $n = 2, 3, \ldots$.