

LMA100, Diskret matematik

Lektion 3

Bijektioner eller

Hur man kombinatoriskt visar att två mängder är lika stora

Att räkna är utan tvivel något vi människor har sysslat med under lång tid. Tänk er att en herde vill hålla koll på om han förlorat något får under dagens (ar)bete. Om inte herden kan räkna kan han ändå kontrollera detta på följande sätt. När han släpper ut fåren på morgonen lägger han en sten för varje får i en hög vid grinden. På kvällen när fåren kommer tillbaka plockar han bort en sten för varje får. Blir det inga stenar kvar har alla fåren kommit tillbaks. Blir det stenar kvar har några får försvunnit, ett för varje sten. (Räcker inte stenarna till har fler får kommit tillbaka en vad han släppte ut.)

Den enkla men djupa idé om en "ett till ett" motsvarighet mellan får och stenar skall vi "göra till matematik".

Definition. En funktion¹ $f : A \rightarrow B$ är *bijektiv* om f är *injektiv*, dvs. $f(a) = f(a')$ medför att $a = a'$,

och

f är *surjektiv*, dvs. till varje element $b \in B$ finns ett element $a \in A$ med $f(a) = b$.

En bijektiv funktion kallas för en *bijektion*.

Denna definition är kanske inte så lätt att förstå. Intuitivt kan man tänka på en bijektion som ett sätt att para ihop element från A med element i B . Mängderna A och B kan vara både ändliga och oändliga.

Definition. Två mängder A och B har *lika många element* om det finns en bijektion mellan A och B .

Ibland (speciellt för oändliga mängder) säger man att A och B har samma *kardinalitet*.

När vi räknar använder vi oss av en speciell hög med stenar nämligen den oändliga mängden $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Detta är vad nästa definition formaliserar.

¹Mer om funktioner kan du läsa i Vretblad, Kapitel 3.

Definition. Låt n vara ett heltal större än eller lika med 1. Mängden A innehåller n element om det finns en bijektion mellan A och $\{1, 2, \dots, n\}$. $\emptyset$ har 0 element. Vi skriver $\#A = n$.

Ett sätt att visa att en funktion f är en bijektion är att visa att den har en invers f^{-1} , dvs. en funktion som uppfyller $f^{-1}(f(a)) = a$ och $f(f^{-1}(b)) = b$ för alla $a \in A$ och $b \in B$.

Exempel. Det är nu hög tid för ett exempel. Låt oss visa att det finns lika många jämna som udda tal i mängden $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ genom att konstruera en bijektion mellan J_n och U_n där J_n och U_n är de jämna respektive de udda talen i $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Låt oss först testa med ett litet värde på n , säg $n = 3$. Då är $J_3 = \{2, 4, 6\}$ och $U_3 = \{1, 3, 5\}$. Vi kan para ihop dessa tal genom $2 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow 3$ och $6 \leftrightarrow 5$. Denna parning kan beskrivas med bijektionen $f : J_3 \rightarrow U_3$ där $f(k) = k - 1$.

Vi kan nu göra likadant för ett godtyckligt heltal n . Vi definierar $f : J_n \rightarrow U_n$ genom $f(k) = k - 1$. Då är lätt att se att f är en bijektion, t.ex. genom att observera att inversen är $f^{-1}(k) = k + 1$.

Exempel. Stärkta av framgången försöker vi oss nu på ett svårare exempel. Vi skall visa att det bland delmängderna till $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ finns lika många delmängder med ett udda antal element som det finns med ett jämnt antal element. Om vi som ovan ”värmer upp” med att studera fallet $n = 3$ ser vi att de åtta delmängderna är

$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1, 2\}$	$\{2\}$
$\{1, 3\}$	$\{3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$

Mängderna i den vänstra kolumnen har ett jämnt antal element och i den högra ett udda antal. Det är uppenbart att de är lika många och genom att para ihop mängderna på samma rad får vi en bijektion mellan mängderna med ett jämnt respektive ett udda antal element. Observera att vi kan beskriva denna bijektion (kontrollera det) genom att om en mängd i den vänstra kolumnen innehåller en etta så får vi mängden till höger genom att ta bort denna etta, och om omvänt mängden inte innehåller en etta får vi den högra mängden genom att lägga till den.

Vi kan nu angripa det allmänna fallet. Låt $\mathcal{J}_n = \{S \subseteq N \mid \#S \text{ är jämn}\}$ och $\mathcal{U}_n = \{S \subseteq N \mid \#S \text{ är udda}\}$. Vi definierar nu en funktion $f : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ (som ovan är $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$) genom

$$f(S) = \begin{cases} S \setminus \{1\} & \text{om } 1 \in S \\ S \cup \{1\} & \text{om } 1 \notin S \end{cases}$$

där S är en godtycklig delmängd till N . Vi ser att $f : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ och att f blir en bijektion mellan $\mathcal{J}_n$ och $\mathcal{U}_n$. Att f är en bijektion ser man lättast (?) genom att observera att f är sin egen invers. Påståendet är bevisat.

Övningar

En del av dessa (alla?) övningar är (nog) svåra. Övningarna markerade med en * har ledning men försök först att lösa dem utan ledning.

Det kan också vara bra att titta på avsnitt I.2 och 3.2.1 i Barnetts bok.

1. Hur många bijektioner $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ finns det?
2. Bevisa följande två identiteter kombinatoriskt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.*$$

3. Ge ett algebraiskt bevis (använd binomialsatsen) av identiteten

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Försök också ge ett kombinatoriskt bevis av detta.*

4. Ge ett algebraiskt (använd binomialsatsen) och ett kombinatoriskt bevis av identiteten

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \binom{n}{0} 2^0 + \binom{n}{1} 2^1 + \binom{n}{2} 2^2 + \dots + \binom{n}{n} 2^n = 3^n.*$$

5. Visa algebraiskt (använd binomialsatsen) att det bland delmängderna till $\{1, 2, \dots, n\}$ finns lika många med jämn kardinalitet som det finns med udda kardinalitet.*

Rekommenderade uppgifter ur Barnett:

avsnitt	uppgift
3.2.1	52(a), 53(a)(d), 60
3.2.2	64, 66

Ledning

2. (b) $\binom{n+1}{k}$ är antalet delmängder till $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ som innehåller k tal. Dela upp dessa delmängder i de som innehåller respektive inte innehåller talet $n+1$.
3. (a) Skriv $2^n = (1+1)^n$.
(b) $\binom{n}{k}$ kan tolkas som antalet delmängder till N med k element. Hur många delmängder finns det totalt?
4. (b) Högerledet räknar antalet strängar med siffrorna 0, 1 och 2 av längd n . (Exempel för $n=2$: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21 och 22.) Hur många av dessa innehåller k tvåor?
(c) Skriv $0 = 0^n = (1-1)^n$.