

LMA100, Diskret matematik

Lektion 4

Summor

I avsnitt I.2 i Barnetts bok behandlas summasymbolen. Lämpliga övningar är

avsnitt	uppgift
I.2	5,6,7

En mycket användbar generaliseringen av Σ -notationen för summor fås på följande vis:

Låt K vara en ändlig delmängd av $\mathbb{N}$. Då betecknar $\sum_{k \in K} a_k$ summan av talen a_k för de k som ligger i K . T.ex. har vi om $K = \{1, 3, 7, 13\}$ att

$$\sum_{k \in K} k^2 = 1^2 + 3^2 + 7^2 + 13^2 .$$

Om mängden definieras av ett eller flera villkor skriver vi bara ut dessa villkor i stället för mängden som de definierar. Till exempel kan summan av alla kvadrater av udda positiva tal mindre än 100 skrivas

$$\sum_{\substack{1 \leq k < 100 \\ k \text{ udda}}} k^2$$

i stället för det mer formella

$$\sum_{k \in \{k | 1 \leq k < 100 \text{ och } k \text{ udda}\}} k^2$$

eller som den mer svårgenomskådade summan

$$\sum_{k=0}^{49} (2k+1)^2 .$$

Övningar

1. Låt K vara en ändlig mängd av heltal och låt f vara en bijektion från K till K . Övertyga dig om följande räkneregler (Ett formellt bevis görs bäst med induktion, en princip som kommer att tas upp i delkursen aritmetik och algebra).

$$\sum_{k \in K} ca_k = c \sum_{k \in K} a_k \quad (\text{distributiva lagen})$$

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{f(k) \in K} a_{f(k)} \quad (\text{kommutativa lagen})$$

$$\text{och} \\ \sum_{k \in K} (a_k + b_k) = \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k$$

2. Beräkna summan $s = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ genom att beräkna $2s = s + s$ där en av summorna beräknas genom att summera ”baklänges”.
3. Vad är summan av de n första udda heltalen? Som exempel har vi $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$ och $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.
4. (a) Visa att

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ledning. Låt j vara ett heltal sådant att $0 \leq j \leq n$. Hur många av delmängderna A till $\{1, 2, \dots, n+1\}$ uppfyller $|A| = k+1$ och $\max A = j+1$, där $\max A$ är det största talet i A .

- (b) Använd detta för att ge en alternativ härledning av uppgift 2.

5. (a) Visa att $k^2 = \binom{k}{1} + 2\binom{k}{2}$.
(b) Beräkna $\sum_{k=1}^n k^2$.
Svar: $\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$, alternativt $\frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$.
6. Beräkna den *geometrisk*a summan $S = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ genom att beräkna $(1-x)S$.