

LMA100, Diskret matematik

Lektion 6

Urvalsproblem, repetetion och några tillägg

Uppvärmningsövningar

1. Hur många "ord" med tre bokstäver kan man bilda av bokstäverna a, b, c, d, e och f om
 - a) upprepningar av bokstäverna inte är tillåtna?
 - b) upprepningar av bokstäverna är tillåtna?
 - c) om ordet skall innehålla e och upprepningar inte är tillåtna?
 - d) om ordet skall innehålla e och upprepningar är tillåtna?
2. På hur många sätt kan man välja
 - a) två frukter,
 - b) nio frukter,
 - c) ett godtyckligt antal (minst en) frukter,från fem (lika) äpplen och åtta (lika) apelsiner?
3. En pokerhand består av fem kort. Vad är sannolikheten att få
 - a) en stege (dvs. korten har på varandra följande valörer, men har inte alla samma färg)
 - b) en kåk (dvs. en triss (tre kort av samma valör) och ett par (två kort av samma valör))på given i poker?
4. En kommitte skall bildas i en förening som består av sju kvinnor och fyra män. På hur många sätt kan det göras om
 - a) kommitten skall bestå av två kvinnor och två män?
 - b) kommitten kan vara godtyckligt stor men ha lika många kvinnor som män?
 - c) kommitten skall ha fyra medlemmar varav minst två är kvinnor?
 - d) kommitten skall ha två kvinnliga och två manliga medlemmar och herr Johansson skall ingå?
 - e) kommitten skall ha två kvinnliga och två manliga medlemmar och herr och fru Johansson skall inte båda vara med?

Urvalsproblem

I Barnett § 3.1, behandlas olika sätt att välja k element från n element. På hur många olika sätt som detta kan ske sammanfattas i följande tabell.

Tabell 2.

<i>Val av k st. från n st.</i>	Med hänsyn till ordning	Utan hänsyn till ordning
Med återläggning	a) n^k	b) $\binom{k+n-1}{k}$
Utan återläggning	c) $\frac{n!}{(n-k)!}$	d) $\binom{n}{k}$

Du bör själv kunna bevisa a), c) och d). Övning: Gör det!

Här bevisar vi b):

Utfallet bestäms av hur många gånger, k_i , som element nummer i väljs. Så det gäller att bestämma antalet olika icke-negativa heltalslösningar till ekvationen

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k. \quad (1)$$

Betrakta följande konfiguration (i figuren är $k = 3$ och $n = 5$)

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \\ | \\ 1 \\ | \\ 1 \\ | \\ 1 \end{array} \right|. \quad (2)$$

Den består av två ytterväggar, $n - 1$ innerväggar och k ettor. Väggarna bildar n stycken fack och genom att låta k_i vara antalet ettor som finns i fack nummer i , ser vi att varje sådan konfiguration svarar entydigt mot en lösning till (1). (I figuren har vi $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = k_4 = 1$ och $k_5 = 0$.) Så antalet lösningar till (1) är detsamma som antalet konfigurationer av typ (2). Men en sådan konfiguration bestäms av var bland de $k + n - 1$ platserna mellan ytterväggarna som vi skall placera de k ettorna (eller de $n - 1$ innerväggarna).

Detta kan göras på $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$ sätt.

□

5. Du skall köpa tio flaskor lättöl i en affär som har tre olika sorter. På hur många sätt kan du göra det?
6. En dominobrickas framsida är delad i två kvadrater som var och en består av ingen, en, ... eller sex prickar. Hur många dominobrickor finns det?
7. Hur många termer får man då man utvecklar $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$?

8. Hur många icke-negativa heltalslösningar finns det till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$?

Hur många (strikt) positiva?

Hur många med $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$?

Förslag till svar:

1: a) 120; b) 216; c) 60; d) 91; 2: a) 3; b) 5; c) 53;

3: a) $10(4^5 - 4) / \binom{52}{5} \approx 0,0039$; b) $13 \cdot 12 \binom{4}{2} \binom{4}{3} / \binom{52}{5} \approx 0,0014$; 4: a) 126; b) 329; c) 301; d) 63; e) 108; 5: 66; 6: 28;

7: $\binom{n+k-1}{n}$; 8: a) 455; b) 165; c) 35;