Explorativ övning Vektorer

Syftet med denna övning är att ge grundläggande kunskaper om vektorräkning och dess användning i geometrin.

Liksom många matematiska begrepp kommer vektorbegreppet från fysiken. Ordet vektor introducerades 1846 av den engelska matematikern W. R. Hamilton, men redan långt innan representerades och sammansatts krafter som vektorer. Senare kom vektorer också att användas för att beskriva andra fysikaliska storheter som har storlek och riktning, t ex elektrisk fältstyrka.

Vi ska tillämpa vektorer i euklidisk geometri. Vi kommer att införa ett koordinatsystem. Vi utser en godtycklig punkt O till **origo** och fixerar en längdenhet.

Definition. En vektor är en riktad sträcka som börjar i origo.

Notation. Vi ritar en vektor, som slutar i en punkt A, som pil med fotpunkt O och spets i punkten A, och skriver $\overrightarrow{OA}$, eller $\boldsymbol{a}$ (eller $\bar{a}$, eller $\vec{a}$, eller $\ldots$).

Vektorns **längd** eller belopp är sträckans längd och skrivs som $|\overrightarrow{OA}|$, $|\boldsymbol{a}|$. En punkt A bestämmer entydigt en vektor, nämligen $\overrightarrow{OA}$, som kallas för **ortsvektor** för A.

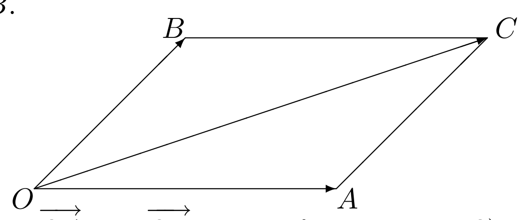
Koordinaterna till en punkt i planet skrivs (x, y), i rummet (x, y, z). Motsvarande vektorer skrivs som kolonn: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. (Boken skriver också (x, y, z) för vektorn för att spara plats.)

Vektorn $\overrightarrow{OO}$ med fotpunkt och spets i O kan inte ritas som pil. Detta är en degenererad riktad sträcka. Vektorn $\overrightarrow{OO}$ kallas fär nollvektor och skrivs också som $\mathbf{0}$.

LMA100, vt 04

För vissa tillämpningar betraktar man vektorer med godtycklig fotpunkt, t ex för att beskriva fältstyrka. Då har man i varje punkt i rummet en vektor med denna punkt som fotpunkt. **Vektorer kan bara adderas om de har samma fotpunkt.** Här kan man tänka sig att olika krafter verkar på en partikel.

Definition: addition av vektorer. Summan $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ är den riktade diagonalen $\overrightarrow{OC}$ i parallellogrammen $OACB$.



(Hur definieras summan om $\overrightarrow{OA}$ och $\overrightarrow{OB}$ ligger på samma linje?)

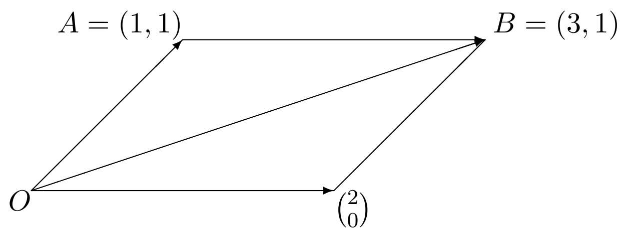
Definition: multiplikation av en vektor med en skalär. Om $\boldsymbol{v}$ är en vektor och λ är et reellt tal så är $\lambda\boldsymbol{v}$ den vektor som uppfyller

- $|\lambda\boldsymbol{v}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{v}|$,
- Om $\lambda > 0$ så har $\boldsymbol{v}$ och $\lambda\boldsymbol{v}$ samma riktning,
- Om $\lambda < 0$ så har $\boldsymbol{v}$ och $\lambda\boldsymbol{v}$ motsatt riktning,
- Om $\lambda = 0$ så är $\lambda\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

För addition och skalärmultiplikation gäller räknereglerna som sammanfatts i Sats 9.5 på S. 207 i boken.

Om vi nu har valt en punkt som origo betraktar vi om inget annat sägs bara vektorer av typ $\overrightarrow{OA}$ med fotpunkt O. Vi definierar $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Detta är den vektor med fotpunkt i origo som har samma längd och riktning som den riktade sträckan AB.

Exempel.



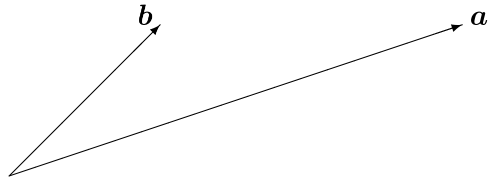
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{3}{1} - \binom{1}{1} = \binom{2}{0}$.

De viktigaste begreppen och satser i detta avsnitt är:

- vektorer, multiplikation med skalärer, vektor addition, koordinater
- skalärprodukt, vektorprodukt

Övning A

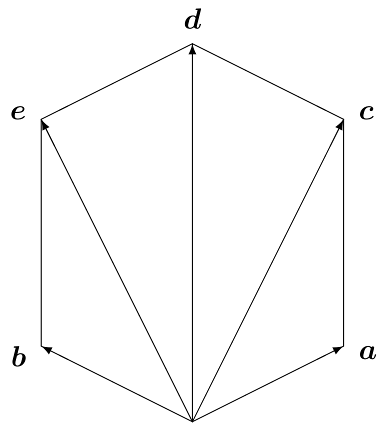
1. Givet tva vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, rita vektorerna $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ och $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.



2. Förenkla $3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-4(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

3. Givet $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, konstruera vektorn $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. Förenkla också uttrycket och jämför svaren.

4. Låt $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ vara två närliggande kantvektorer i en regelbunden sexhörning. Bestäm diagonalvektorerna $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ och $\boldsymbol{e}$ uttryckta i $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$.



5. Visa att mittpunkten på sträckan AB har ortsvektorn $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

6. Bestäm ortsvektorn för den punkt P som delar sträckan AB i förhållandet $1:2$, resp $2:3$ och allmänt $m:n$.

7. Givet $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Var ligger punkterna X för vilka $\overrightarrow{OX}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ med $\lambda+\mu=1$, $0\leq\lambda\leq 1$?

Övning B

Lös uppgifterna 9.8, 9.9, 9.10, 9.12 och 9.13 i boken (sida 221).

Övning C

1. Lös uppgifterna 9.14, 9.15, 9.18, 9.19 och 9.22 i boken på sid. 223–224.

2. Visa att
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2)$$
genom att använda formeln $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$ och räknereglerna för skalärprodukt (Sats 9.9).

3. Visa samma formel
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2)$$
geometriskt. Använd formeln för att visa Sats 9.19.

4. Lös uppgifterna 9.42 och 9.43 i boken på sid. 232.

5. Betrakta triangel $\triangle ABC$. Visa att en punkt P ligger på höjden genom C om och endast om $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB}$. Använd detta för att visa att de tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.

Övning D

Lös uppgifterna 9.26, 9.27, 9.28, 9.30, 9.31 och 9.66 i boken.