MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 20040604
Klockan: 8.45–13.45
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Håkan Samuelsson,
076-2186654

Tentamensskrivning i LMA 100, Matematik för lärare 1, del 2

1. Formulera och bevisa Pythagoras' sats.

2. Bestäm minsta avståndet från punkten $(4, 2, -2)$ till linjen genom punkterna $(3, 1, -1)$ och $(1, 0, -1)$.

3. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(3, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$ och $(4, 2, -2)$.

4. Visa parallellogramsatsen: Om $ABCD$ är en parallellogram så är

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 \ .$$

5. Lös ekvationen

$$z^8 = 16$$

där z är ett komplext tal. Svara på formen $z = a + ib$ där a och b är reella tal och alla trigonometriska uttryck förenklats.

6. Visa att följande relation $\sim$ på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mängden av de komplexa tal minus nollan, är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna geometriskt:

$$z \sim w \quad \text{om} \quad \left|\frac{z}{w}\right| = 1 \ .$$

7. Låt $P(X)$ beteckna polynomet $X^2 + 9X$.

a) Faktorisera $P(X)$ i irreducibla polynom över $\mathbb{R}$.
b) Faktorisera $P(X)$ i irreducibla polynom över $\mathbb{C}$.
c) Avgör vilka två av följande polynom som är irreducibla över respektive talkroppar:
  i) $X^3 + 2004$ över $\mathbb{R}$,
  ii) $X^2 - 2$ över $\mathbb{Q}$,
  iii) $X^2 + 36$ över $\mathbb{R}$,
  iv) $X^2 + 9$ över $\mathbb{C}$.

8. Avgör vilka fyra av följande påståenden som är sanna:

a) Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n + 1$ är surjektiv och injektiv.
b) Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = n + 1$ är surjektiv och injektiv.
c) Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^{10} + 7z^2 + 1$ är surjektiv.
d) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(z) = z^{10} + 7z^2 + 1$ är surjektiv.
e) Mängden av alla jämna tal är uppräknelig.
f) Mängden av alla komplexa tal är uppräknelig.
g) $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ är en talkropp.
h) $\mathbb{Z}[i]$ är en talkropp.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För deluppgift 7 c) och uppgift 8 gäller att varje rätt svar ger poäng medan ett fel svar ger poängavdrag (men man kan inte få mindre än 0 poäng totalt på uppgiften).

Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 18 juni.

Lycka till!

Robert Berman och Jan Stevens