Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 100 , Matematik för lärare 1, del 2, 20040604

1. Formulera och bevisa Pythagoras' sats.

Se kompendiet om Euklidisk geometri och övningarna.

2. Bestäm minsta avståndet från punkten $(4, 2, -2)$ till linjen genom punkterna $(3, 1, -1)$ och $(1, 0, -1)$.

Linjen genom $(3, 1, -1)$ och $(1, 0, -1)$ ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst i punkten där planet genom $(4, 2, -2)$, vinkelrät mot linjen, skär linjen. Planet har ekvation $2x + y = 10$. I skärningspunkten gäller $6 + 4t + 1 + t = 10$, så $t = \frac{3}{5}$. Avståndet mellan $(4, 2, -2)$ och $(4\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5}, -1)$ är längden av vektorn $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$, som är $\frac{1}{5}\sqrt{1 + 4 + 25} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$.

3. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(3, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$ och $(4, 2, -2)$.

Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En annan normalvektor är $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Ekvationen är $x - 2y - z = 2$.

4. Visa parallellogramsatsen: Om $ABCD$ är en parallellogram så är

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 \; .$$

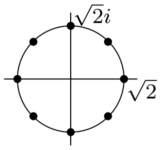
Bevis med vektorräkning: observera att $|CD| = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$ och $|BC| = |AD| = |\overrightarrow{AD}|$. Vidare är $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ och $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Så $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AD}|^2$ och $|AC|^2 + |BD|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2 = 2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AD}|^2$.

5. Lös ekvationen

$$z^8 = 16$$

där z är ett komplext tal. Svara på formen $z = a + ib$ där a och b är reella tal och alla trigonometriska uttryck förenklats.

Vi använder $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ekvationen $z^8 = 16$ ger $|z|^8 = 16$ och $8\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vi får $|z| = \sqrt{2}$ och $\theta = k\pi/4$. Bara $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$ ger olika komplexa tal:



Så $z = \sqrt{2}(\cos k\pi/4 + i\sin k\pi/4)$. Obs: $k = 1$ ger $\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + i$.
Svar: $z = \pm\sqrt{2},\ \pm i\sqrt{2},\ \pm(1+i),\ \pm(1-i)$.

6. Visa att följande relation $\sim$ på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mängden av de komplexa tal minus nollan, är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna geometriskt:

$$z \sim w \quad \textbf{om} \quad \left|\frac{z}{w}\right| = 1\ .$$

Alternativ 1: observera att $|\frac{z}{w}| = 1 \iff \frac{|z|}{|w|} = 1 \iff |z| = |w|$ så $z \sim w \iff |z| = |w| \iff$ z och w ligger på samma cirkel med medelpunkt i origo. Så ekvivalensklasserna är mängden av dessa cirklar, som ju ger en *partition* av $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Detta medför att $\sim$ är en ekvivalensrelation på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ enligt en sats i kursen.
Alternativ 2: verifiera att $\sim$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Om man använder $z \sim w \iff |z| = |w|$ som ovan blir det trivialt att verifiera egenskaperna! Annars kan man göra så här:
i) *reflexiv* ($z \sim z$): $|\frac{z}{z}| = |1| = 1$, så $z \sim z$.
ii) *symmetrisk* ($z \sim w \Rightarrow w \sim z$): antag $z \sim w$ d v s $|\frac{z}{w}| = 1$. Då fås $|\frac{w}{z}| = \frac{|w|}{|z|} = \frac{1}{|z|/|w|} = \frac{1}{|z/w|} = \frac{1}{1} = 1$. Så $w \sim z$.
iii) *transitiv* ($z \sim u$ & $u \sim w \Rightarrow z \sim w$): antag $|\frac{z}{u}| = \frac{u}{w}| = 1$. Då fås $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{|u|} \cdot \frac{|u|}{|w|} = 1 \cdot 1 = 1$ så $z \sim w$!

7. Låt $P(X)$ beteckna polynomet $X^2 + 9X$.
a) Faktorisera $P(X)$ i irreducibla polynom över $\mathbb{R}$.
b) Faktorisera $P(X)$ i irreducibla polynom över $\mathbb{C}$.
c) Avgör vilka två av följande polynom som är irreducibla över respektive talkroppar:
i) $X^3 + 2004$ **över** $\mathbb{R}$,
ii) $X^2 - 2$ **över** $\mathbb{Q}$,
iii) $X^2 + 36$ **över** $\mathbb{R}$,
iv) $X^2 + 9$ **över** $\mathbb{C}$.

a) $X^2 + 9X = X(X + 9)$ över $\mathbb{R}$, $9 \in R$.
b) $X^2 + 9X = X(X + 9)$ över $\mathbb{C}$, $9 \in C$.
c) i) $X^3 + 2004$ är *reducibel* över $\mathbb{R}$, ty alla polynom av grad ≥ 3 är reducibla över $\mathbb{R}$ enligt en sats.
ii) $X^2 - 2$ är *irreducibel* över $\mathbb{Q}$, ty om $X^2 - 2$ vore reducibel över $\mathbb{Q}$, så skulle det i egenskap av att vara ett andragradspolynom ha ett nollställe i $\mathbb{Q}$. Men $X^2 - 2 = 0$ ger $X = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!
iii) $X^2 + 36$ är *irreducibel* över $\mathbb{R}$, ty $X^2 + 36 > 0$ för alla $X \in R$ så $X^2 + 36 \neq 0$ om $X \in \mathbb{R}$ (se ii)!).
iv) $X^2 + 9 = (X + 3i)(X - 3i)$ över $\mathbb{C}$, alltså *reducibel*!
Svar: ii) och iii) är irreducibla.

8. Avgör vilka fyra av följande påståenden som är sanna:

a) **Funktionen** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n + 1$ **är surjektiv och injektiv.**

b) **Funktionen** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = n + 1$ **är surjektiv och injektiv.**

c) **Funktionen** $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^{10} + 7z^2 + 1$ **är surjektiv.**

d) **Funktionen** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(z) = z^{10} + 7z^2 + 1$ **är surjektiv.**

e) **Mängden av alla jämna tal är uppräknelig.**

f) **Mängden av alla komplexa tal är uppräknelig.**

g) $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ **är en talkropp.**

h) $\mathbb{Z}[i]$ **är en talkropp.**

b, c, e och g är sanna (resten falska).
a) f är ej surjektiv ty $f(n) = 0$ saknar lösning, $n \in \mathbb{N}$.
b) sant. Surjektiv: tag godtycklig $m \in \mathbb{Z}$. Då fås $f(m-1) = m$, där $m - 1 \in \mathbb{Z}$. Injektiv: $f(n) = f(m) \Leftrightarrow n + 1 = m + 1 \Leftrightarrow m = n$.
c) sant, ty givet $w \in \mathbb{C}$ finns z så att $f(z) = w$ d v s $z^{10} + 7z^2 + (1 = w) = 0$ (enligt algebrans fundamentalsats).
d) falskt, $f(z) \geq 0$ om $z \in \mathbb{R}$, så negativa tal 'träffas ej' av f.
e) sant, $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ ger en uppräkning av $2\mathbb{Z}$ (d v s en bijektion med $\mathbb{N}$).
f) falskt, ty $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ och $|R$ är ej uppräknelig enligt sats.
g) sant (se motsvarand stencil).
h) falskt, ty man kan ej alltid dividera i $\mathbb{Z}[i]$, t ex $1 \in \mathbb{Z}[i]$ och $2 \in \mathbb{Z}[i]$ men $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}[i]$.